O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
TOG‘-KON SANOATI VA GEOLOGIYA VAZIRLIGI

NAVOIY DAVLAT KONCHILIK VA TEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI

NAZARIY MEXANIKA

fanidan

O‘QUV USLUBIY MAJMUA

Tuzuvchilar:

Mangliyeva J.X – f.m.f.n. nomzodi, dosent, NDKTU

1	Kirish…….....	
2	O`quv materiallari…….....	
3	Ma’ruzalar to`plami…….…….	
4	Amaliy mashg`ulotlarni bagarish uchun uslubiy qo`llanma…….	
5	Hisob grafik ishi topshiriqlarini bajarish uchun uslubiy qo`llanma ……	
6	Глоссарий …….....	
7	Tarqatma materiallar dasturi…….....	
8	Na`munaviy o`quv …….……	
9	Ishchi o`quv dasturi …….....	
10	Yakuniy nazorat savollari……..….	
11	Baholash mezonlari……..	
12	Asosiy dabiyotlar.....	

1-MA`RUZA

MAVZU: “NAZARIY MEXANIKA” FANIGA KIRISH. STATIKA. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

Ma`ruza rejasi:

1. Nazariy mexanika o`rganadigan soha
2. Asosiy tushunchalari va ta`riflar
3. Statika aksiomalari
4. Bog`lanish va uning reaksiyalari.

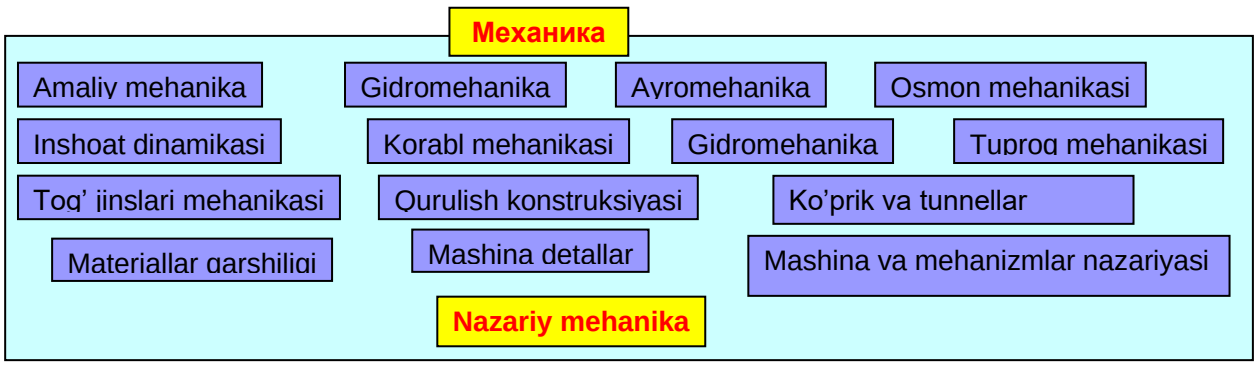
Bog`lanishlar aksiomasi.

Tayanch so`zlar va iboralar:

Mexanik harakat, mexanik o’zaro ta’sir, nazariy mehanika, moddiy nuqta,Statika, kinematika, dinamika, jism, kuch, jismning kinematik holati, kuchlair sistemasi, teng ta’sir etuvchi, ekvivalent kuchlar sistemasi, o’zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi, inersiya aksiomasi, Ikki kuch aksiomasi, qo’shish aksiomasi, parallelogram aksiomasi, ta’sir va aks ta’sir aksiomasi, qotish aksiomasi, erkin jism, bog’lanishdagi jism, bog’lanish, bog’lanish reaksiyasi, bog’lanishdan ozod qilish prinsipi.

Kirish

Qattiq va deformatsiyalangan jismlar xuddi shuningdek suyuq va gazsimon muhitlarning mehanik harakati va mehanik o’zaro ta’sirini o’rganuvchi fanlar to’xtalishiga mexanika deyiladi.



Mexanik harakat –Materiyaning harakatturlaridan biri bo'lib, fazoda vaqt o'tishi bilan moddiy jismlar bir-biriga nisbatan ko'chishini ifodalaydi.

Mexaniko'zarota'sir – Materiyaning o'zaro ta'sir ko'rinishlaridan biri bo'lib, jism yoki uning qismlarining mexanik harakatini o'zgarishini ifodalaydi, huddi shuningdek ularning o'zaro joylanishini o'zgarishiga qarshilik ko'rsatadi.

Nazariy mehanika –Moddiy jismlarning bir-biriga nisbatan. Ko'rsatadigan ta'siri va mexanik harakatining umumiy qonunlari haqidagi fanlar.

Qonunlarning umumiyligi-har qanday jism va sistema uchun o'rinlidir - bunda qaralayotgan jismni abstraklashtirib olamiz. Shu sababli nazariy mehanika boshqa amaliy texnika fanlar uchun bazaviy fan hisoblanadi..

Moddiy jism va sistemaning abstrakt modeli (obrazi)

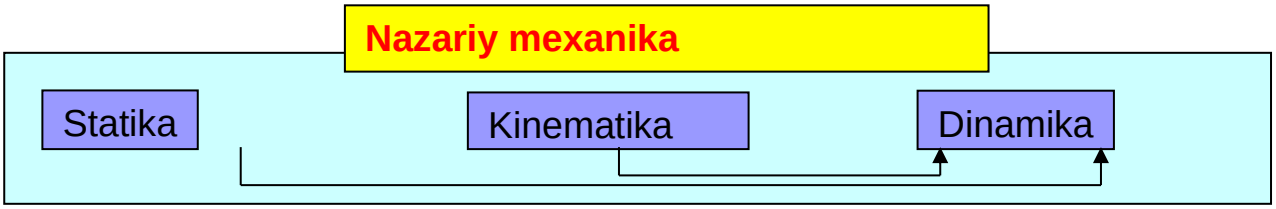
Moddiy nuqta (MN)– o'lchamga ega emas, lekin geometrik nuqtaga nisbatan jism massasiga teng bo'lgan massaga ega bo'ladi.

Absolyut qattiq jism (AQJ) – Har qanday ta'sir natijasida ham moddiy nuqtalar orasidagi masofa doimo o'zgarmasdan qoladi.

Mehanik Sistema – Harakatning umumiy qonunlari yoki o'zaro ta'sir yordamida bir-biriga bog'langan moddiy nuqtalar yoki qattiq jismlar to'plami.

Masalan- Yerni harakatini o'rganishda uni Quyosh atrofia aylanayapti deb qarasak uni moddiy nuqta deb qarash mumkin bajarish uni o'z o'qi atrofida aylanishi o'rgansak – uni AQJ deb qarash mumkin Agarda Yerda ro'y beradigan hodisalarni o'rgansak (quyulish) oqish, siljish.Yerni mehanik siljish deb qarash mumkin.

Nazariy mexanika uch qismdan iborat:



Statika –Mehanik sistemalarning nisbiy muvozanatligini o'rganadi.Muvozanatni hosil qilish uchun nuqtalar orasidagi aniq munosabat zarur

shuning uchun statikaga nuqtalarning umumiy xossalari nuglarni ekvivalanent nuglar sistemasi bilan almashtirishning umumiy xossalari o’rganiladi.

Kinematika – Mehanik harakat va harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarsiz o’rganadi, ya’niharakat geometrik nuqtai nazardan o’rganiladi.

Dinamika – Mehanik harakat harakat obyektiga ta’sir etuvchi kuchlar bilan birgalashib o’rganiladi.Shunday qilib, harakat bilan ta’sir etuvchi nuq orasidagi bog’lanish o’rganiladi.

Nazariy mexanikaning asosiy tushunchalari

Kuch – Mehanik o’zaro ta’sir o’lchovi. Kuch vektor kattalik bo’lib, yo’nalishi, kattaligi (moduli) va qo’yilgan nuqtasi bilan harakterlanadi

Jismning kinematik holati – Tinch yoki o’zgarmas parametrlar bilan harakat holati.

Kuchlair sistemasi – Qaralayotgan obyektga qo’yilgan kuchlar to’plami.

Teng ta’sir etuvchi– Kuchlar sistemasiga ekvivalent bo’lgan kuch bo’lib, u (obyekt) jismning kinematik holatini o’zgartirmaydi.

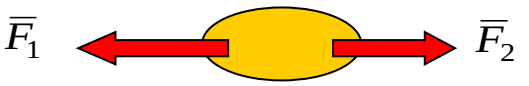
Ekvivalent kuchlar sistemasi – Berilgan kuchlar sistemasiga teng kuchli bo’lib, obyekt jismning kinematik holatini o’zgartirmaydi.

O’zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi –Uning ta’sirida obyekt (jism) muvozanat holatida bo’ladi.

Statika aksiomalari

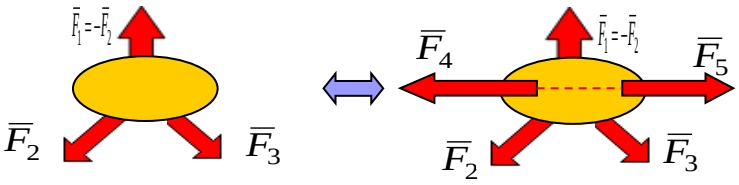
1. **Inersiya aksiomasi**–Jism o’zaro muvozanatlanuvchi kuchlar sistemasi ta’sirida tinch yoki tengo’lchovli to’g’ri chiziqli harakat holatida bo’ladi.

2. **Ikkikuchi aksiomasi** – Agardajism ikki kuch ta’sirida muvozanat holatida bo’lsa, u holda bu kuchlar modul jihatidan teng va birto’g’ri chiziq bo’ylab qarama qarshi tomonga yo’nalgan bo’ladi. Bunday ikki kuch oddiy o’zaro muvozanatlanuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi.



$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$

3. **Qo’shishaksiomasi** –Agarda berilgan kuchlar sistemasiga o’zaro muvozanatlashgan. Kuchlar sistemasini qo’shsak yoki ayirsak jismning kinematik holati o’zgarmaydi.

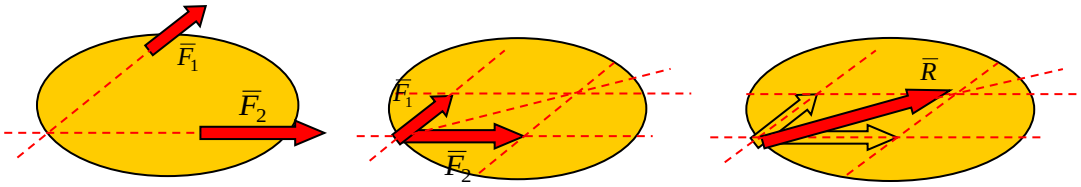


$$\overline{F}_4 = -\overline{F}_5$$

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \equiv (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5)$$

Natija – Kuchni o’z ta’sir chizig’I bo’ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko’chirilsa uning jismga ta’siri o’zgarmaydi.

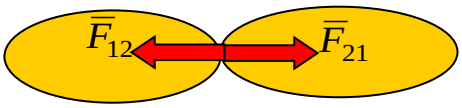
4. **Parallelogram aksiomasi** – Ikkita kesishuvchi kuchning teng ta’sir etuvchisi, shu kuchlarning qurilgan parallelogramning dioganaliga teng bo’ladi



$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 + 2F_1F_2\cos(F_1, F_2)}$$

5. **Ta’sirvaaksta’siraksiomasi** – Jismlarning bir-biriga ta’sir o’zaro teng va bir to’g’ri chiziq bo’ylab qarama-qarshi tomonga yo’nalgan bo’ladi. (Nyutonning III qonuni)



$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$$

5. **Qotish aksiomasi** – Aga deformasiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o’zgarmaydi.

Bog’lanish va bog’lanish reaksiyalari

Erkin jism – Jismning erkin ko’chishi, hech qanday boshqa jismbilan chegaralanmaydi (jism fazoda ixtiyoriy teng harakatlana oladi)

Bog’lanishdagi jism – Uning harakati boshqa jismlar bilan chegaralangan bo’ladi. (Jismning harakati yoki holati biror sabab bilan cheklangan bo’ladi)

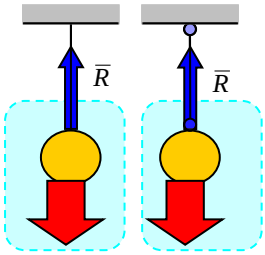
Bog’lanish – Jismning harakati va holatini cheklovchi sabab.

Bog’lanish reaksiyasi –Bog’lanishning jismga ko’rsatadigan ta’sirini almashtuvchi kuch.

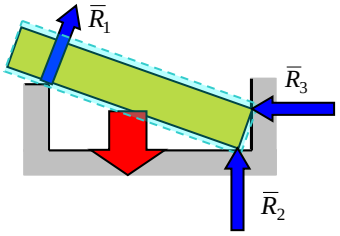
Bog’lanishdan ozod qilish prinsipi – Bog’lanishdagi jismni erkin jism shakliga keltiridagi kuch jismga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga bog’lanish rekasiya kuchini ham qo’shish kerak.

Bog’lanish va bog’lanish reaksiyalari

1. **Ip, shartli sterjen**:2. **Absolyt silliq yuza**:

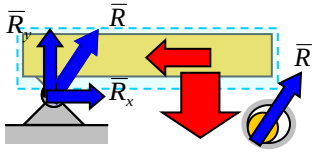


Ipning yoki stejen-ning Rekasiya ip yoki Stejen bo’ylab Yo’nalgan bo’ladi



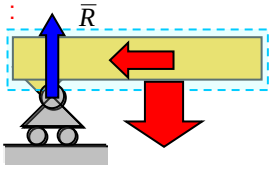
Silliq tekislik reaksiyasi jism sirti bian bog’lanishga o’tkazilgan umumiy urinma tekislikka perpendikulyar yo’nalgan bo’ladi.

3. **Qo’zg’almas silindirik sharnir:**



Qo’zg’almas sharnir reaksiyasi sharnir markazidan o’tadi,sharnir o`qiga perptndikulyar va ixtiyoriy yunalishda bo`ladi.

4. **Qo’zg’aluvchan silindirik harnir**:

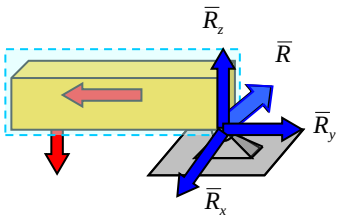


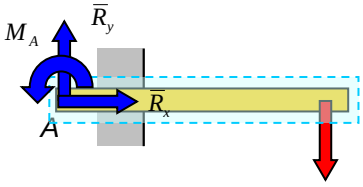
Qo’zg’aluvchan sharnir reaksiyasi sharnir markazidan o`tadi, sharnir o`qiga va u qo’yilgan tekislikka perptndikulyar bo’ladi

Qo’zg’almas sharnir reaksiyani ikkita tashkil etuvchilarga ajratish mumkin masalan R_x va R_y kordinata o’qlariga paralel

5. **Qo’zg’almas sferik sharnir**: 6. **Tekkis qistirib mahkamlangan tayanch:**

Tekis qistirib mahkamlangan tayanchga uchta reaktiv zo’riqish paydo bo’ladi: ikkita reaktiv kuchlar R_x va R_y hamda reaktiv moment Ma (juft kuch)





Ixtiyoriy ko`rinishdagi bog`lanish uchun umumiy qoida:

Agar bog`lanish bir yoki bir nechta ko`chish (maksimal ko`chishlar soni oltita bo`lib, ulardan uchtasi ilgarilanma va uchtasi aylanma)ga qarshilik qilsa faqat shu ko`chishga va shu ko`chish yo`nalishiga mos reaksiyalar (kuchlar va momentlar) paydo bo`ladi.

Nazorat savollari

1.Qanday jism absolyut qattiq deb ataladi?
2.Kuch nechta faktor bilan aniqlanadi?
3.Qanday kuchlar sistemasi ekvivalet sistema deyiladi?
4.Qanday kuch berilgan kuch sistemasining teng ta’sir etuvchisi deyiladi?
5.Statikaning asosiy aksiomalarini ta’riflang.
6.Uch kuch teoremasi nimadan iborat?
7.Qanday jism erksiz jism deyiladi?
8.Bog`lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
9.Bog`lanishdan bo`shatish aksiomasi nima?
10.Absolyut qattiq jism tayanadigan silliq sirtning reaksiya kuchi qanday yo`nalgan? Jismning mazkur sirtga bosimi qanday yo`naladi?
11.Arqon, zanjir va vaznsiz qattiq cterjenli bog`lanish reaksiyalari qanday yo`naladi?
12.Sferik, silindrik sharnirli bog`lanish reaksiyalari qanday bo`ladi?
13.Qistirib mahkamlangan bog`lanish reaksiya kuchining yo`nalishi qanday?

2-MA`RUZA

MAVZU: KUCHLAR, KESISHUVCHI KUCHLAR TIZIMI

Ma`ruza rejasi:

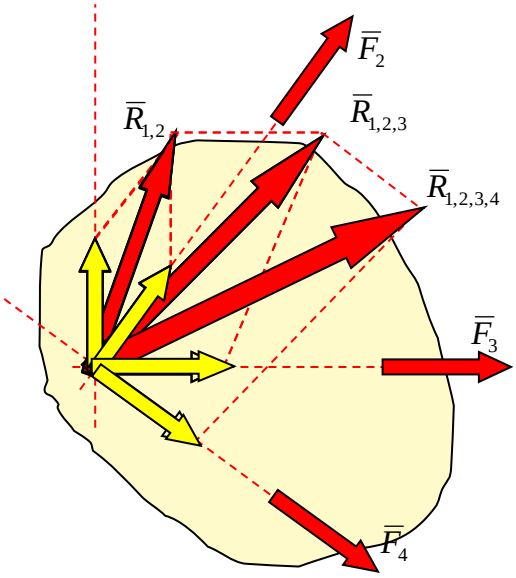
1. Uchrashuvchi kuchlar sistemasini geometrik qo`shish.
2. Uchrashuvchi kuchlarning teng ta`sir etuvchisi.
3. Uch kuch haqidagi teorema.
4. Kuchning o`qdagi va tekislikdagi proeksiyasi.
5. Uchrashuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti.

Tayanch so`zlar va iboralar:

Kesishuvchi kuchlar sistemasi– *Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar.*

Ixtiyoriy kuchlar sistemasini tekshirish rejasi quyidagi uchta masalani ketma-ket yechishga keltriladi. ***:***

1. *Sistemani qanday soddalashtirish kerak?*
2. *Sistemani oddiy ko'rinishlari qanday?*
3. *Sistemani muvozanat sharti qanday?*



1.Barchakuchlarnio'zta'sirchiziqlaribo'ylab kecherishnuqtasigakelriliq (bundajismningko'nik,asiholatio'zgarmaydi – Qo'shishaksiomasinatijasi)

Birinchi ikkita F_1 va F_2 kuchlarni qo`shamiz (parallelogramm aksiomasi). $\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ Kuchlarsonibittigakamayadi.

Hosil bo'lgan $R_{1,2}$ teng ta'sir etuvchiga keyingi F_3 kuchni qo'shamiz. Kuchlarsoniyanabittagakamayadi $\overline{R}_{1,2,3} = \overline{R}_{1,2} + \overline{F}_2$

Endi shu ishni (operasiyani) keyinggi $\boldsymbol{F}_4$.kuch bilan takrorlaymiz. Natijada berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lgan bitta kuch qoladi .

$$\overline{R}_{1,2,3,4} = \overline{R}_{1,2,3} + \overline{F}_4$$

Kuchlarni qo'shishdagi parallelogramm qoidasini **kuch ko'pburchagi** qurishga almashtirish ham mumkin – buni uchun bir kuchni oxiridan ikkinchi kuch

o’z-o’ziga parallel ko’chiriladi hamda birinchi kuch oxiri bilan ikkinchi kuch boshi mos kelguncha davom ettiriladi va h.k.

Bunday qo’shishning natijasi qilib birinchi kuch boshi bilan so’ngi kuchning oxirini tutashtiruvchi vektor olinadi.

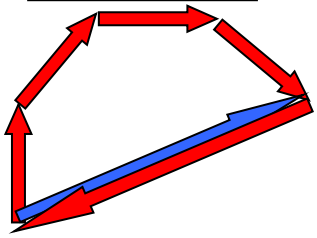
Uchrashuvchi kuchlarning teng ta`sir etuvchisi

2.**Sistemaning oddiy ko’rinishi** – ham kuch bo`lib u berilgan kuchlarning uchrashuv nuqtasiga quyilgan bo’ladi. Shunday qilib bir nuqtaga qo’yilgan kuchlar sistemasi shu kuchlar, sistemasining geometrik yig’indisiga teng *bo’lgan bitta teng ta’sir etuvchiga* keltiriladi. (bu kuch berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo’ladi.)

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + ... = \sum \overline{F}_i$$

3.Agarda sistemaning teng ta’sir etuvchisi nolga teng bo’lmasa, u holda bunday kuchlar sistemasi ta’siridagi jism teng ta’sir etuvchi yo’nalishida harakatlanadi (kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi). Kuchlar sistemasini muvozanatlash uchun, miqdor jihatdan hosil bo’lgan, teng ta’sir etuvchiga teng va qarama-qarshi yo’nalgan kuch qo’yish kerak bo’ladi. (ikki kuch haqidagi aksioma). Shunday qilib, *kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti, teng ta’sir etuvchining nolga tengligidan iboratdir.*

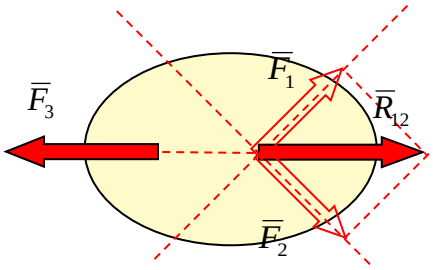
$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0$$



Bu shart kuch ko’pburchagining yopiqligi bilan teng kuchslidir, *bunda kuchlarning yo’nalishi kontur bo’ylab o’zgarmaydi.*

Uch kuch haqidagi teorema

Agarda jism o'zaro parallel bo'lmagan uch kuch ta'sirida muvozanatga bo'lsa, u holda bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.



1.Ikki kuchni o'zlarining ta'sir chizig'I bo'ylab ularni kesishish nuqtasiga kuchiramiz (bunda ularning kinematik holati o'zgarmaydi – qo'shish teoremasining natijasiga ko'ra.)

2.Bu kuchlarni qo'shamiz (parallelogramm aksiomasi)

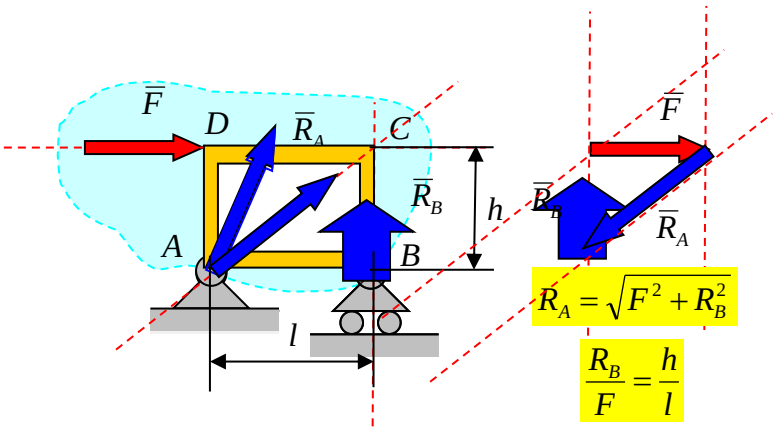
Endi sistema hammasi bo'lib ikkita kuchdan iborat bo'ladi.

Agarda bu kuchlar miqdor jihatdan teng va qarama – qarshi yo'nalgan bo'lsa, u holda bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Shunday qilib, berilgan uchta kuchlar sistemasi bir nuqtada kesishadi.

Uch kuch haqidagi teoremadan foydalanilgan ikkita reaksiya kuchidan birining yo'nalishini aniqlash ham mumkin:

Qo'zg'aluvchan sharnirning reaksiyasi **R_B** vertikal yo'nalgan (tayanch tekisligiga perpendikulyar). Qo'zga'lmas sharnir reaksiyasi **R_A** ning yo'nalishi (gorizontga og'ish burchagi) hozircha no'malum.

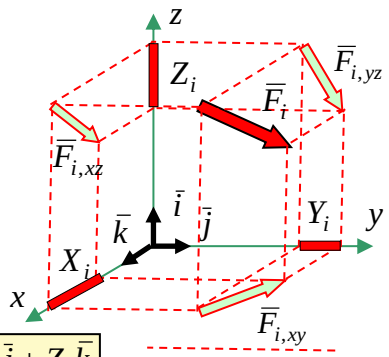
Agarda jism uchta***F***, $\boldsymbol{R}_A$ va $\boldsymbol{R}_B$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa u holda bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi (C nuqtada):



Haqiqatdan ham reaksiya kuchlarining kattaligi va yo'nalishi, kuch uchburchagini qurish va uchburchaklarning o'xshashlik alomatidan foydalanib osongina aniqlanadi. :

Teng ta’sir etuvchini analitik aniqlash

Geometrik yig’indisi – teng ta’sir etuvchiga teng bo’lgan har bir kuchni, uning koordinata o’qlardagi proeksiyalari va birlik vektorlar (ortlar) orqali ifodalanish mumkin:



U holda teng ta`sir etuvchi proeksiyalar orqali quyidagica ifodalanadi:

$$\bar{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$$

$$\bar{R} = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$$

Ortlar (birlik vektor) orqali gruppalasak teng ta’sir etuvchining proeksiyalari uchun quyidagi bog’lanishhosilbo’ladi :

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...$$

Bundan teng ta’sir Teng ta’sir etuvchi etuvchining yo’naltiruvchi proeksiyalari: kosinuslar :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i; \\ R_y &= \sum Y_i; \\ R_z &= \sum Z_i; \end{aligned}$$

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R};$$
$$\cos(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

Teng ta’sir etuvchiningmoduli:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari

Muvozanat sharti:

$$\bar{R} = 0$$

Teng ta’sir etuvchi nolga teng Bo’lishi kerak

Muvozanat tenglamaning moduli

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$$

Bundan Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analatik ifodasi:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0. \end{aligned}$$

Nazorat savollari

1. Qanday kuchlar sistemasiga bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi?
2. Qanday ko‘pburchakka kuch ko‘pburchagi deyiladi?
3. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta’sir e’tuvchisi qanday topiladi?
4. Kuch ko‘pburchagida teng ta’sir e’tuvchi qanday tasvirlanadi?
5. Kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi qanday hisoblanadi?
6. Teng ta’sir etuvchining proeksiyalari qanday hisoblanadi?

3 – MA`RUZA

MAVZU: KUCHNING NUQTAGA VA O‘QQA NISBATAN MOMENTI

Ma`ruza rejasi:

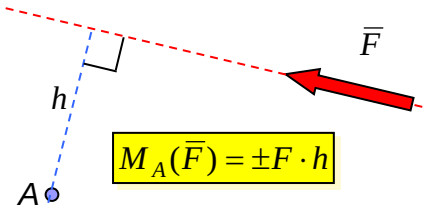
1. Kuchning markaz (nuqta)ga nisbatan moment
2. Fazodagi ixtiyoriy markazga nisbatan kuch momenti
3. Kuchning o`qqa nisbatan momtnti Kuchning markazga va o`qqa nisbatan momentlarining bir-biriga bog`liqligi
4. Juft haqidagi teoremalar
5. Juft kuchlar va uning momenti
6. Juftlarni ekvivalentligi haqida teorema va ularni qo`shish
7. Juftlar sistemasini muvozanat sharti.

Tayanch so`zlar va iboralar:

Tekis kuchlar sistemasi,kuchmomenti, kuchning yelkasi, juft kuch statika, jism, kuch, kuch momenti, juft kuch, juft kuch momenti, kuch elkasi,

Tekis kuchlar sistemasi

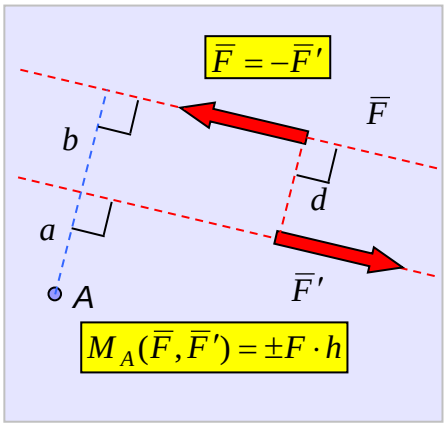
Tekis kuchlar sistemasi - bunday kuchlar bir tekislikda yotadi va ularning ta’sir chiziqlari bir nuqtada kesishmaydi *:*



Bunday kuchlar sistemasini ko`rib chiqish uchun yangi tushunchalar kiritish kerak bo`ladi.

1.Tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan kuch momenti.

2.**Juft kuch. Juft kuch momenti**.**Tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan kuch momenti** – Kuch modulini uning yelkasiga ko’paytirilganda teng bo’lgan algebraik, kattalik. Agar kuch jismni soat strelkasi yo’nalishiga teskari aylantirishga intilsa uning momenti (+) musbat, aks holda (-) manfiy ishora bilan aniqlanadi.



Kuchning yelkasi – Moment markazidan kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikulyarga teng kesma

Juft kuch – Miqdor jihatidan teng va qarama-qarshi tomonga yo'nalgan o'zaro parallel bo'lgan ikkita kuchlar to'plami. Juft kuch bundan ortiq soddalashmaydi (bir kuch bilan almashtirilmaydi va mexanik o'zaro ta'sirjashuvni yangi kuchlar harakteristikasi hisoblanadi).

Tekislikdagi juft kuch momenti (juft kuch momenti haqidagi teorema) – keltirish (qutb) markazini toplanishiga bog'liq ellis va juft tashkil etuvchi kuchlardan birining moduli bilan juft yelkasiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi.

Agar juft jismni soat strelkasi yo'nalishiga teskari aylantirishga untilsa, uning momenti (+) musbat, aks holda (-) manfiy ifoda bilan olinadi.

Juft kuch yelkasi – bir kuch ta'sir chizig'idan ikkinchi kuch ta'sir chizig'iga tushurilgan perpendikulyarga teng kesma uzunligi.

Juft tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi juft momentiga teng.

$$M_A(\bar{F},\bar{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd$$

Juft haqidagi teoremalar

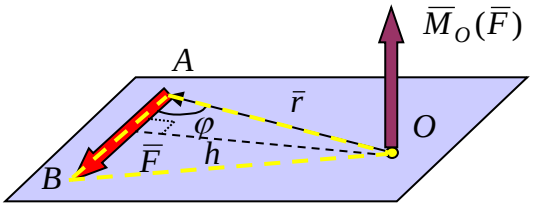
Juft kuchni o'z ta'sir chizig'I bo'ylab ko'chirish – Juft kuchni o'zining ta'sir tekisligi bo'ylab, ixtiyoriy nuqtaga ko'chirish mumkin. Bunda jismning kinematik holati o'zgarmaydi.

Juft kuchning ekvivalenti haqida – Juft kuchni boshqa juft kuch bilan almashtirish mumkin, agarda ularning momenti bir-biriga algebraik teng bo'lsa. Bundajismningkinematikholatio'zgarmaydi.

$$M(\bar{F}_1,\bar{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\bar{F}_2,\bar{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\bar{F}_1,\bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_2,\bar{F}_2')$$

Tekislikdagi juft kuchlarni qo'shish haqida – Tekislikdagi juft kuchlar sistemasini momenti berilgan juft kuchlarning algebraik momentiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.

Juft kuch sistemasining muvozanat sharti - $M = \sum M_i = 0$



Fazodagi ixtiyoriy markazga nisbatan kuch momenti- vektor kattalik bo'lib ixtiyoriy markazdan kuch quyilgan nuqtagacha bo'lgan radius – vektor bilan kuch vektorining vektorial ko'paytmasiga teng.

$\overline{M}_O(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}$ $\qquad$ $M_O(\overline{F}) = rF\sin(\bar{r}, \overline{F}) = Fh$

Aniqlanishiga ko'ra kuch moment vektori vektorial ko'paytmasi markaz va kuchga qurilgan tekislikka tik yo'nalgan bo`ladi.

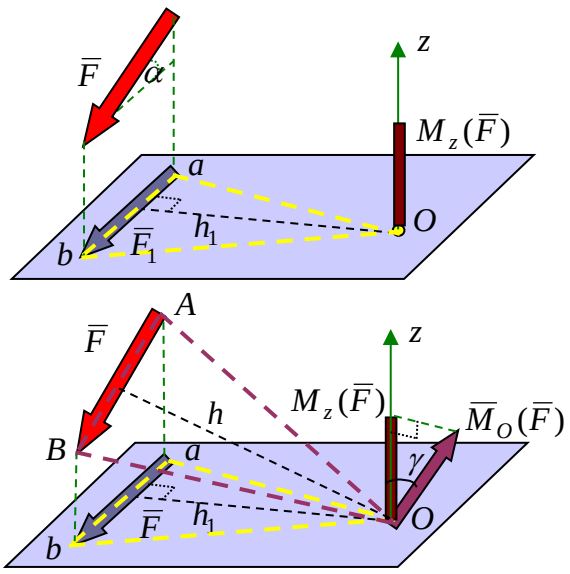
Markazga nisbatan kuch moment vektori moduli teng bo'ladi.

Markazga nisbatan kuch moment vektori modul son jihatidan *OAB*. uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng bo'ladi.

Kuchning o`qqa nisbatan momenti

Kuchning o`qqa nisbatan moment - algebraik kattalik, kuch vektorining o'qqa perpendikulyar tekisligida proeksiyani uning yelkasiga ko'payirilganiga teng.

Kuch yelkasi – o'qning tekislik bilan kesishgan nuqtadankuch proeksiyasiga tushurilgan tik kesma (perpendikulyar). Agara kuch jismni soat strelkasi yo'nalishiga teskari aylantirishga intilsa uning momenti musbat, aks holda manfiy bo'ladi.



$M_z(\overline{F}) = \pm F_1 h_1$

Kuchning markazga va o`qqa nisbatan momentlarining bir-biriga bog`liqligi

Z o'qqida yotgan O markazga nisbatan kuch momenti vektorining moduli son jihatidan *OAB* uchburchak yuzining ikkilanganligiga teng bo'ladi.

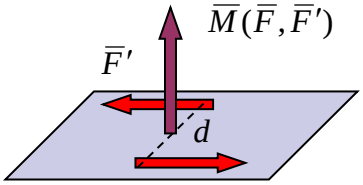
$$M_O(\bar{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

O'qqa nisbatan kuch momenti son jihatidan *Oab* uchburchak yuzining ikkilanganligiga teng bo'ladi $M_z(\bar{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$

Oab uchburchak *OAB* uchburchakning z o'qiga perpendikulayr bo'lgan tekislikdagi proeksiyasi va uning yuzasi *OAB* uchburchak yuzasi bilan quyidagi munosabatda bog'langan. $S_{Oab} = S_{OAB}\cos\gamma$

bunda γ - uchburchaklar tekisliklari orasidagi ikki yoqlama burchak.

Nuqtaga nisbatan kuch momenti vektori *OAB*, uchburchak tekisligiga perpendikulyar bo'lganligi uchun bu moment vektori bilan Z 0`qi orasidagi burchak ham γ ga teng bo'ladi. $M_z(\bar{F}) = M_0(\bar{F})\cos\gamma$



Fazodagi juft kuch momenti – Juft ta'sir tekisligiga tik bo'lgan vektor bo'lib, uning yo'nalishi uning uchidan qaralganda jism har doim soat strelkasiga qarshi aylanadi (shakl)

Juft moment vektorining moduli juft tashkil etuvch kuchlardan biri bilan juft yelkasiga ko`paytirilganiga teng bo`ladi. $M = Fd = F'd$

Nazorat savollari

1.Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi? Mazkur momentning ishorasi qanday tanlanadi?
2.Qanday holda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
3.Kuchning o`z ta`sir chizig`i bo`ylab ko`chirilganda uning momenti qanday o`zgaradi?
4.Kuchning o`qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5.Qanday holda kuchning o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
6.Nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan o`qqa nisbatan kuch momenti orasida qanday munosabat bor?
7.Nuqtaga nisbatan kuch momentining vektorligini tushuntirib bering.
8.O`qqa nisbatan kuch momentining analitik ifodasi qanday yoziladi?

4 – MA`RUZA

MAVZU: KUCHLARNI BIR MARKAZGA KELTIRISH

Ma`ruza rejasi:

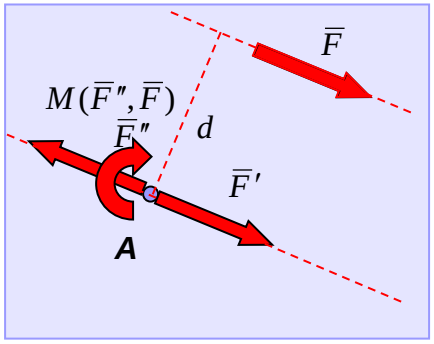
1. Kuchni berilgan markazga keltirish.
2. Ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish
3. Ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda holga keltirish
4. Ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari
5. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi
6. Sistema bosh vektorini analitik usulda aniqlash
7. Sistema bosh momentini analitik aniqlash

Tayanch so`zlar va iboralar:

Fazodagi ixtiyoriy markazga nisbatan kuch momenti, o'qqa nisbatan kuch momenti, Fazodagijuftkuchmomenti

Kuchlarni berilgan markazga keltirish (Puanso lemmasi)

Kuchlarni berilgan markazga keltirish (Puanso lemmasi) – Kuchni o'z-o'ziga parallel holda tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirish mumkin, agrada ko`chirilgan kuchga momenti shu kuchning qaralayotgan nuqtaga nisbatan momentiga teng bo'lgan juft kuch qo'ysak, bu kuch ta`sirida jismning kinematik holati o`zgarmaydi.



Sistemaning A nuqtasiga, miqdori o'zaro va berilgan kuchga teng, va berilgan kuchga parallel bo'lgan tog'ri chiziqqa o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchni qo'shamiz:

$$\bar{F}'' = -\bar{F}' = -\bar{F}$$

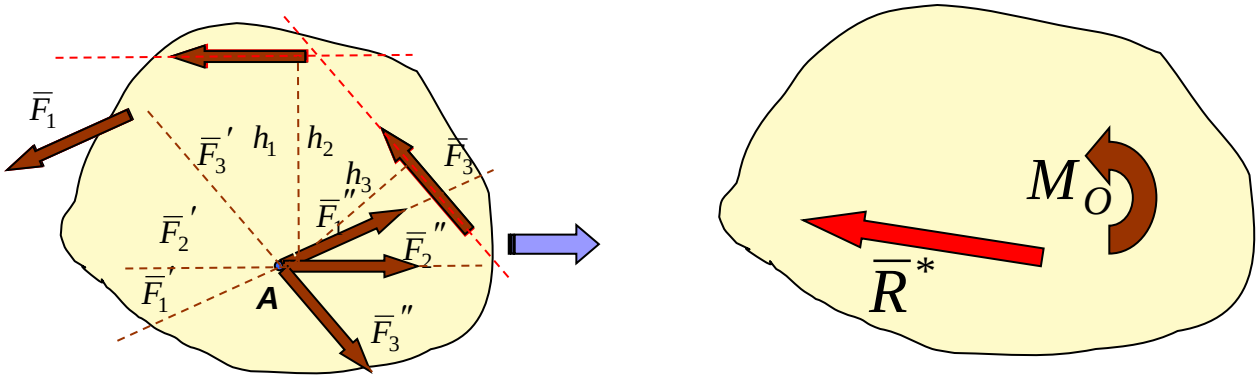
Bunda Jismning kinematik holati o'zgarmaydi (qo'shish haqidagi aksiomaga asosan). Berilgan kuch bilan qarama-qarshi yo'nalgan qo'shilgan kuch juft kuchni hosil qiladi. **Bu juft momenti berilgan kuchdan keltirish markaziga nisbatan olingan momentga teng bo'ladi.** $M(\bar{F}'',\bar{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar{F})$

Ko'p hollarda juft kuchni yoy strelkasi bilan ifodalash qulayroq bo'ladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasini

berilgan markazga keltirish

Tekislikda ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz va Puanso usulidan foydalanib har bir kuchni shu nuqtaga keltiramiz. Berilgan kuchlar sistemasi o’rniga kesishuvchi kuchlar sistemasi va juft kuchlarsistemasi hosil qilamiz..



Bu kesishuvchi kuchlar sistemasini bitta kuch bilan almashtirish mumkin, biz bu kuchni oldin teng ta’sir etuvchi deb atagan edik, hozir unu bunday atay olmaymiz, chunki bu nuqtada bu kuchlardan tashqari juft kuchlar ham mavjud. Juft kuchlarni bir-biriga algebraik qo`shib bitta juftga keltiramiz (juftlarni qoshish haqidagi teorema). Hosil bo’lgan juft berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olinggan momentlarning algebraik yig’indisiga teng bo’ladi.

Umumiy holda tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasi bosh vektor deb ataladigan bitta kuch va kuchlardan olingan bosh moment deb ataladigan juft momentiga

- bosh vektor, $\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$

bosh moment. $\boxed{M = M_A = \sum M_{iA}}$

Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat sharti

Kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentining bir vaqtda nolga tengligidan iborat: $\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0}$ $\boxed{M = M_A = \sum M_{iA} = 0}$

Analitik muvozanat (I-tur tenglamalar)- Barcha kuchlarning

$$\boxed{\begin{aligned} \textstyle\sum X_i &= 0; \\ \textstyle\sum Y_i &= 0; \\ \textstyle\sum M_{iA} &= 0 \end{aligned}}$$

x, y o'qlaridagi proeksiyalari yig'indisi va ixtiyoriy A nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisi nolga teng:

Yana ikki ko`rinishdagi movozanat Tenglamalari mavjud. Ular (II va III -tur) quyidagilardir:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \perp B \\ AB \end{matrix} \qquad \begin{cases} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} C \\ \notin \\ AB \end{matrix}$$

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varinon teoremasi

Agarda kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lsa, bu teng ta'sir etuvchining ixtiyoriy markazga nisbatan momenti, uni tashkil etuvchi kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning algebraik yiq`indisiga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchiga keltiriladi..

Bunday sistema muvozanatda bo'lmaydi ($\boldsymbol{R} \neq 0$). Bu sistemani ***R'***, kuch bilan muvozanatlaymiz,u ***R***,teng ta'sir etuvchiga teng bo'lib uning ta'sir chizig'i bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi (ikki kuch haqidagi aksioma).

Shunday qilib ***F***1, ***F***2, ***F***3 … kuchlar sistemasi va muvozanatlovchi ***R'*** bilan birgalikdagi muvozanatda bo'ladi va muvozanat tenglamasini qanoatlantiradi, masalan: $\sum M_{iA} - M_A(R) = 0$

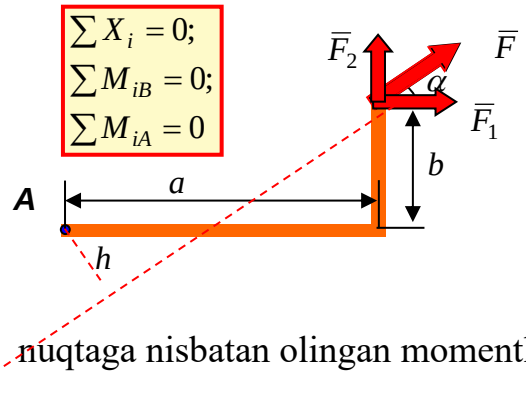
R' kuch, *R* teng ta'sir etuvchiga teng va uning ta'sir chizig'i bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalganligi*uchun*

MA(*R*') = - *MA*(*R*). Bu tenglikni muvozanat tenglamasiga qo'ysak:

yoki $\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$ $\qquad$ $M_A(R) = \sum M_{iA}$

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani qo'llanishiga doir misollar:

1. Kuch yelkasini hisoblash qiyin bo'lgan holda, nuqtaga nisbatan kuch momentini hisoblash: Masalan.



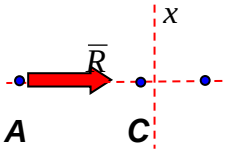
$\boldsymbol{F}$ $\sum M_{iA} = 0$ Kuchni $\boldsymbol{F}_1$ va $\boldsymbol{F}_2$. tashkil etuvchilarga ajratamiz. U holda $\boldsymbol{F}$ kuchning A nuqtaga nisbatan momenti har bir kuchdan shu nuqtaga nisbatan olingan momentlar yig'indisiga teng bo'ladi:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. II, III tur muvozanat tenglamalarining cheklanganligini zarurligini isbotlash. Agarda bo'lsa u holda sistema teng ta'sir etuvchiga keltiriladi, buning uchun u A nuqtadan o'tishi kerak, chunki uning (shu nuqtaga nisbatan) moment nolga teng bo'lishi kerak (Varinvon teoremasi)

Agarda bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchi B nuqta orqali o'tishi kerak..

Bunda teng ta'si r etuvchinin g AB to'g'r ichiziqqa perpendikulyar o'qidagi proeksiyasiva AB To'g'ri yotuvchi nuqtaga nisbatan teng ta'sir etuvchining moment aynan nolga teng bo'ladi (teng ta'sir etuvchining ixtiyoriy qiymati).



$\sum M_{iB} = 0$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi

Agar kuchlar bir tekislikda yotmasa va ularning ta’sir chiziqlari bir nuqtada kesishmasa b*unday kuchlar sistemasi* **fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deyiladi.**

Bunday kuchlar sistemasini o’rganishda quyidagi yangi tushunchalarni kiritiladi

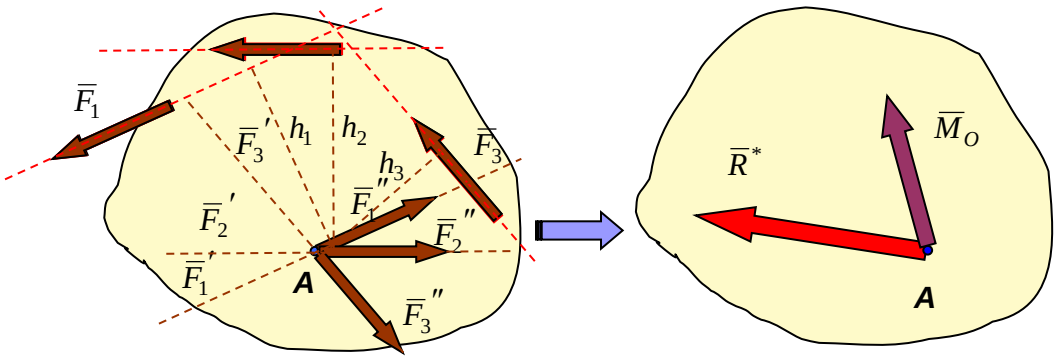
1. Fazodagi ixtiyoriy markazga nisbatan kuch momenti.
2. O’qqa nisbatan kuch momenti.
3. Fazodagi juft kuch momenti.

Kuchlarsistemasinihaqida to`liq ma`lumotga ega bo`lish uchun ishni qo`yidagireja asosida olib boramiz

1. Sistemani qanday soddalashtirish kerak?
2. Sistemani eng soda holi qanaqa ko`rinishda bo`ladi?
3. Sistemani muvozanat sharti qanday?

Ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish

Tekislikda ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz, Puanso usulidan foydalanib har bir Kuchnishu nuqtaga keltiramiz.Bu holda berilgan ixtiyoriy kuchlarsistemasi o`rniga kesishuvchi kuchlar sistemasi va juft sistemani hosil qilamiz. Puanso usulidan foydalanib hosil qilingan sistema berilgan ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasidan unga juft kuch vektori qo`shilganligi bilan farq qiladi.



Markazga keltirilgan kesishuvchi kuchlar sistemasi shu markazga qo`yilgan bitta kuchga keltiriladi.

Juft sistema bitta juftga (juftlarni qo`shish teoremasiga asosan) keltiriladi. Bu juftning momenti berilgan kuchlarning keltirish markaziga nisbatan momentlarining vektor yiq`indisiga teng.

Umumiy holda ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasi bosh vektor deb ataladigan bitta teng ta`sir etuvchi va keltirish markaziga nisbatan olingan bitta bosh momentga keltiriladi.:

- bosh vektor,- $\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i}$ **bosh moment.** $\boxed{\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA}}$

Sistema bosh vektorini analitik usulda aniqlash

Bosh vektor xuddi oldingidek teng ta`sir etuvchini koordinata oqlaridagi proeksiyalari va birlik vektor (ort)lari orqali topiladi:

$$\boxed{\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...}$$

$$\boxed{\bar{R}^* = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x^*\bar{i} + R_y^*\bar{j} + R_z^*\bar{k}}$$

Bundan Bosh vektor $\boxed{R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}}$

Bosh vektor proeksiyasi:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x^* &= \sum X_i; \\ R_y^* &= \sum Y_i; \\ R_z^* &= \sum Z_i; \end{aligned}}$$

yo`naltiruvch moduli: kosinuslari

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\bar{R}^*, x) &= \frac{R_x^*}{R^*}; \\ \cos(\bar{R}^*, y) &= \frac{R_y^*}{R^*}. \end{aligned}}$$

Sistema bosh momentini analitik aniqlash

Bosh moment yuqorida kursatilganidek koordinata oqlaridagi proeksiyalari va

$$\boxed{\bar{M}_A = \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + ... = M_{1x}\bar{i} + M_{1y}\bar{j} + M_{1z}\bar{k} + M_{2x}\bar{i} + M_{2y}\bar{j} + M_{2z}\bar{k} + ...}$$

$$\boxed{\bar{M}_A = (M_{1x} + M_{2x} + ...)\bar{i} + (M_{1y} + M_{2y} + ...)\bar{j} + (M_{1z} + M_{2z} + ...)\bar{k} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}}$$

birlik vektor (ort)lari orqali quyidagicha topiladi:

Bundan bosh moment

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Moment proeksiyasi:

$$M_x = \sum M_{ix};$$
$$M_y = \sum M_{iy};$$
$$M_z = \sum M_{iz};$$

mos yo`naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\overline{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A};$$
$$\cos(\overline{M}_A, y) = \frac{M_y}{M_A}.$$

Fazoda joylashgan ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta`siridagi jism muvozanatda bo`lishi uchun bu kuchlarning bosh vektori hamda bosh nolga teng bo`lishi zarur va yetarli:

$$\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0 \qquad \overline{M} = \overline{M}_A = \sum \overline{M}_{iA} = 0$$

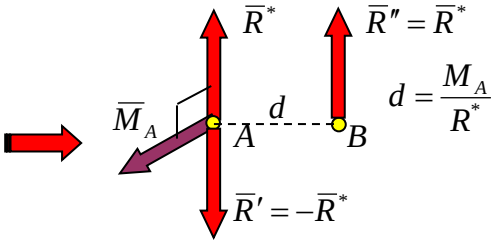
Muvozanat tenglama oltita tenglamalardan iborat bo`lib, u bosh vektor va bosh moment proyeksiyalari ifodasidan foydalanib keltirilib chiqarilgan:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum M_{xi} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \quad \sum M_{yi} = 0;$$
$$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_{zi} = 0.$$

Fazoviy kuchlar sistemasini oddiy holga keltirishning mumkin bo`lgan variantlari:

	$\overline{R}^*$	$\overline{M}_A$	Qo`shimcha shartlar	Sistemaning oddiy ko`rinishlari
1	$\overline{R}^* = 0$	$\overline{M}_A = 0$	$\overline{R}^* \perp \overline{M}_A$	Muvozanat shartlari
2	$\overline{R}^* \neq 0$	$\overline{M}_A \neq 0$		Teng ta`sir etuvchi
3	$\overline{R}^* \neq 0$	$\overline{M}_A = 0$		Juft kuch
4	$\overline{R}^* = 0$	$\overline{M}_A \neq 0$		Teng ta`sir etuvchi
			$\overline{R}^* \perp \overline{M}_A$	Kuch vinti, kuch va jufn

Sistemani teng ta`sir etuvchiga keltirish sharti:



$$\overline{R}^* \cdot \overline{M}_A = R^* M_A \cos(\overline{R}^*, \overline{M}_A) = 0$$

$$\overline{M}_A = 0; \quad => \overline{R}^* \cdot \overline{M}_A = 0$$

Analitik va`ni koordinata ko`rinishida:

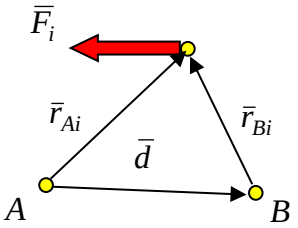
$$\overline{R}^* \perp \overline{M}_A; \quad => \overline{R}^* \cdot \overline{M}_A = 0 \quad (\cos(\overline{R}^*, \overline{M}_A) = 0)$$

$$\overline{R}^* \cdot \overline{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0$$

Sistema bosh momentining keltirish markazining

Tanlanishiga boq`liqligi

Sistema bosh momentining keltirish markazi o'zgarganda ixtiyoriy $\boldsymbol{F}_i$ kuch momenti o'zgarishini ko'ramiz va har bir markazga nisbatan kuch momenti uchun bog'lanishini yo'zamiz:



$$\overline{M}_A(\overline{F}_i) = \overline{r}_{Ai} \times \overline{F}_i \qquad \overline{M}_B(\overline{F}_i) = \overline{r}_{Bi} \times \overline{F}_i$$

1) A va B keltirish nuqta (markaz)larini d radius – vektor orqali o'zaro bog'laymiz:

$$\overline{d} = \overline{r}_{Ai} - \overline{r}_{Bi} \quad \text{yoki} \quad \overline{r}_{Bi} = \overline{r}_{Ai} - \overline{d}$$

2) $\boldsymbol{r}_{Bi}$radius-vektorni $M_B(F_i)$моменti ifodasiga qo'yamiz:

$$\overline{M}_B(\overline{F}_i) = (\overline{r}_{Ai} - \overline{d}) \times \overline{F}_i = \overline{r}_{Ai} \times \overline{F}_i - \overline{d} \times \overline{F}_i$$

3) Barcha kuchning $\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i)$ моментlarini yig'amiz:

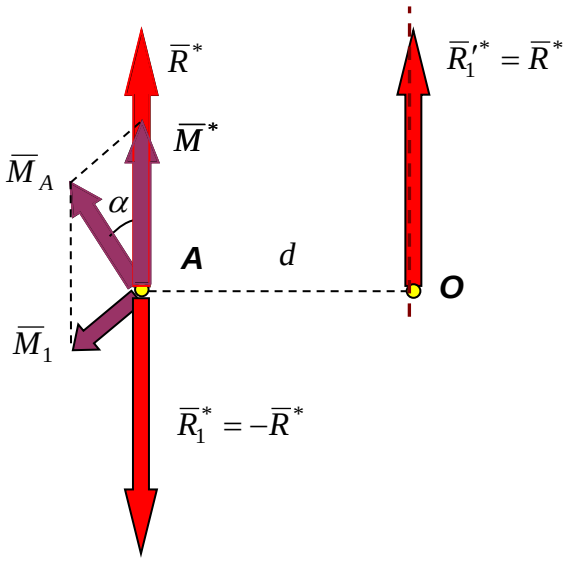
$$\sum \overline{M}_B(\overline{F}_i) = \sum \overline{r}_{Ai} \times \overline{F}_i - \sum \overline{d} \times \overline{F}_i = \sum \overline{M}_A(\overline{F}_i) - \overline{d} \times \sum \overline{F}_i$$

4) Kuch bosh моментиngkeltirish markaziholatining bog'lanishigabog'liqligiuchunifoda

hosil qildik.

$$\boxed{\overline{M}_B = \overline{M}_A - \overline{d} \times \overline{R}^*}$$

Bu bog’lanishdan foydalanibkuchlarsistemasinioddiyholgakeltiramiz. Kuchlarsistemasi o’zaroα.burchaktashkilqiluvchiboshvektor $\boldsymbol{R}^*$ va bosh momenti$\boldsymbol{M}_A$, bo’lganjuft A nuqtaga (A keltirishmarkazlari) keltirilgan bo`lsin.



Bu ifodadan foydalanib kuchlar sistemasini oddiy holga keltirishni to`liq ko`rib chiqaylik. Sistema kuchlari A nuqtaga bir-biri bilan ixtiyoriy burchak hosil qiluvchi bosh vektor va momenti bosh momentga teng juftga keltirilgan bo`lsin.

1. Juftning $\boldsymbol{M}_A$ bosh momentini ikkita $\boldsymbol{M}^*$ va $\boldsymbol{M}_1$ momentlarga yoyamiz. Ulardan biri $\boldsymbol{M}^*$ bosh vektoryo`nalishida, ikkinchisi $\boldsymbol{M}_1$esa shu vektorga perpendikulyar bo`lsin.

2.Momenti $\boldsymbol{M}_1$ ga tengjuftkuchniboshvektormoduliga teng kuch ko`rinishida tasvirlaymiz.Bu juft elkasi quyidagiga teng bo`ladi: $d = \frac{M_1}{R^*}$

3.A nuqtadan kuchlar sistemasini olib tashlaymiz.(qo`shish aksiomasi).

4.Bundan ajralib qolgan va momenti $\boldsymbol{M}^*$ga teng juftni $\boldsymbol{R}'^*$qo`yilgan O markazga kochiramiz (fazoviy juftni ko`chirish haqidagi teorema)

Nazorat savollari

1.Puanso lemmasi qanday ta’riflanadi?
2.Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga keltirishni tushuntiring.
3.Bosh vektor va bosh moment nima?
4.Qanday holda iztiyoriy kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi?
5.Qanday holda iztiyoriy kuchlar sistemasi bosh momentga keltiriladi?
6.Dinamo nima?
7.Teng ta’sir etuvchining yo`naltiruvch kosinuslari qanday aniqlanadi?
8.Bosh momentining yo`naltiruvchi kosinuslari qanday topiladi?
9.Bosh moment bilan bosh vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
10.Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday ta’riflanadi va yoziladi?

5 – MA`RUZA

MAVZU: KINEMATIKA PREDMETI VA NUQTA KINEMATIKASI.

Ma`ruza rejasi:

1.Kinematikaga kirish.

2. Harakat qonuning koordinata usulida berilishi.

3. Harakat qonuning vektor usulida berilishi.

4. Harakat qonuning tabiiy usulida berilishi.

5. Nuqta tezligi.

6. Nuqta tezlanishi

Tayanch iboralar:

Nuqta, to`g`ri va egri chiziqli harakatlar, trayektoriya, harakat tenglamalari, ko`chish, nuqtaning tezligi, tezlik vektori, tezlik moduli, tezlik vektorining proyeksiyalari.

Kinematika – Nazariy mexanikaning bo'limi bo'lib mexanik harakatni bu harakatni vujudga keltiruvchi kuch tahsirisiz o'rganadi va ikki qismdan iborat buladi:

Nuqta kinematikasi – qattiq jism nuqtalari harakatini o'rganish uch un asos bo'lgan moddiy nuqtalarning hvarakatini o'rganadi.

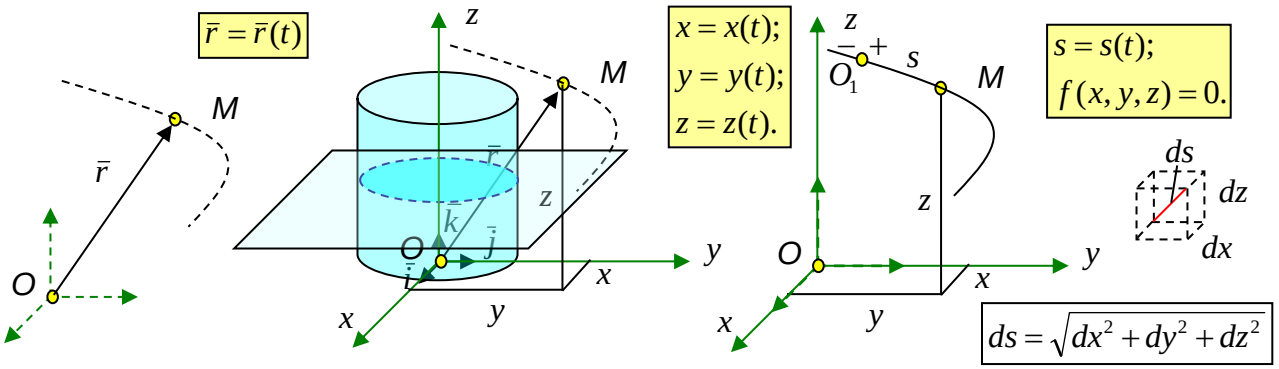
Nuqta harakatining berilishi – ixtiyoriy vaqt da vomida fazoda nuqtaning holatini aniqlash imkoniga ega bo'lish (nuqtaning harakat qonuni va yoki harakat tenglamasi).

Nuqtaning harakat traektoriyasi – nuqtaning harakati davomida fazoda qoldirgan holatlari to'plami (izi).

Nuqtaning harakati uch usulda beriladi:**Vektor usuli:** Radius-vektorning

Koordinatalar usuli: Nuqta holatining

Tabiiy usul: Nuqtaning harakat qonuni koordinatalari va traektoriyasi yo'nalishi bilan beriladi.



.

Nuqtaning barcha berilish usullari o'zaro ekvivalent va bir-biri bilan bog'langan:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

1.Vektor va koordina ta usullari orasidagi munosabat:

$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

2.Koordinata va tabiiy usullari orasidagi munosabat:

3.Harakat traektoriisi tenglamasini hosil Qilish uchun koordinata ko'rinishidagi xarakat Tenglamasidan vaqtni yo'qotish kerak, chunki troek-Toriya vaqtga bog'liq emas:

$$\begin{aligned} &x = x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ &y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ &z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}$$

Oxirgii kkita tenglama chiziqli sirtni ifodalaydi. Bu sirtlar kesishish chizig'i, nuqtaning harakatt rayektoriyasini ifodalaydi.

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Masalan:

$$\begin{aligned} &x = t \Rightarrow t = x \\ &y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = R^2; \\ &z = c. \end{aligned}$$

Oxirgi ikkita tenglama yasovchisi Z o'qqa parallel va radiusi R ga teng bo'lgan tsilindri ksirtni ifodalaydi. Kesimi esa OXY o'qiga parallel va Z o'qi bo'ylab S masofaga siljiydi. Bu sirt larning kesishish chizig'I nuqtaning harakat troektoriyasi bo'lib, u *R*radiusl iaylanadan iboratdir.

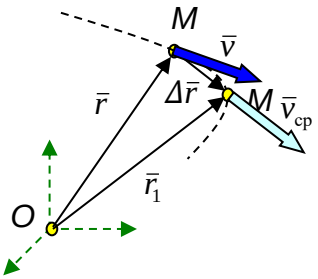
Nuqta tezligi –nuqtaning fazodag iholatini qanchalik tez o'zgarishin ixarakterlovch ikattalik.

Nuqta harakatini berilishining uchta usuli niqta tezligini aniqlashning usulini aniqlaydi:

Vektor usul: Nuqtaning t va $t_1 = t + \Delta t$ vaqtlardagi ikki holatinisolishtiramiz:

$$\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}_{cp}$$

$$\begin{aligned} t &\Rightarrow \bar{r}; \\ t_1 = t + \Delta t &\Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta \bar{r}; \end{aligned}$$



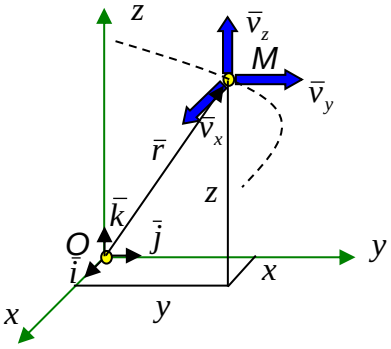
Δt - vaqt oralig'idagi sho'rtacha tezlik

vektori u MM_1 kuchish vektori bo'ylab yo'nalgan

$\Delta t \to 0$ deb, limitga o'tamiz:funktsiya ortirmasini orgument ortirmasiga bo'lgan nisbatida olingan limit funktsiya hosiliga teng (hosila ta'rifi); ya'ni

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

- ***t**,vaqtdagi tezlik vektori troektoriyaga o'rinma bo'ylab yo'naladi.*



Koordinatalar usuli: M nuqtaning radiusi vektori koordinatalar orqali qo'yidagicha ifodalanadi:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

Tezlikni aniqlashning vektor formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \\ &= \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \end{aligned}$$

Tezlik vektorining tashkil etuvchilari kamponentlari:

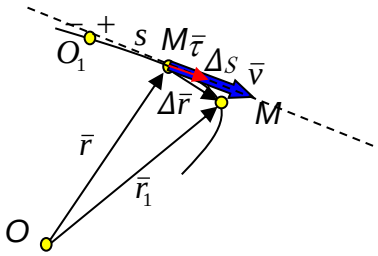
$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}; \\ v_y &= \dot{y}; \\ v_z &= \dot{z}. \end{aligned}$$

Tezlikning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \dot{x}(t)\bar{i}; \\ \bar{v}_y &= \dot{y}(t)\bar{j}; \\ \bar{v}_z &= \dot{z}(t)\bar{k}. \end{aligned}$$

Tezlik moduli va tezlik yo'nalishi:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \\ \cos(\bar{v}, x) &= \frac{\dot{x}}{v}; \\ \cos(\bar{v}, y) &= \frac{\dot{y}}{v}. \end{aligned}$$



Tabiiy usul: Radius vektorni murakkab kurinishida tasvirlaymiz*:* $\bar{r}(t)=\bar{r}[s(t)].$

Tezlikni vektor formuladagi ifodasidan foydalanamiz: $\bar{v}=\frac{d\bar{r}(t)}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\dot{s}.$

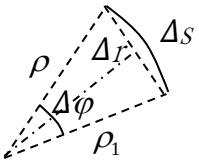
Radius vektor hosilasini limit ko'rinishida tasvirlaymiz*:* $\frac{d\bar{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}.$

Radius vektor orttirmasi MM_1 vektor bo'ylab yo'nalgan bo'lib uning limiti urinma bo'ylab yo'naladi.

Radius vektor hosilasining kattaligi yoy koordinata bo'ylab 1 teng bo'ladi:

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi}=1.$$

$\Delta s \to 0$ da egrilik radiusi $\rho_1 \to \rho$, egrilik radiuslari orasidagi burchak $\Delta\varphi \to 0$, surat - teng yonli uchburchakning asosi, maxraji ρ *radiusli yoy uzunligi.*



SHunday qilib, radius vektordan yoy koordinatasi bo'yicha olingpn hosila birlik vektorga teng bo'lib, troektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi:

Tezlik vektori qo'yidagi ifodaga teng bo'ladi: $v_\tau=\dot{s}.$

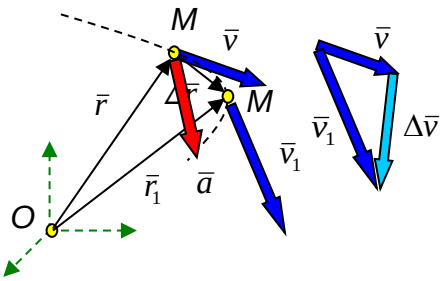
Tezlikning urinmadagi proektsiyasi: $\bar{v}=\dot{s}\bar{\tau}.$

$\dot{s}>0$ ezlik vektori yoy koordinatasi o'sish tomoniga yo'nalgan bo'ladi, *aks holda teskari tomonga yo'naladi*

Nuqtaning tezlanishi-nuqta tezligini tez uzgarishini xarakterlovchi kattalik.

Nuqtatezlanishini aniqlash usullari:

Nuqta harakatini berilishining uchta usuli niqta tezlanishini aniqlashning usulini beradi:



Vektor usul: t va $t_1 = t + \Delta t$: vaqtdagi nuqtaning ikki holati tezliklarini solishtir:

$$\begin{array}{l} t \quad \Rightarrow \bar{v}; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta\bar{v}; \end{array}$$

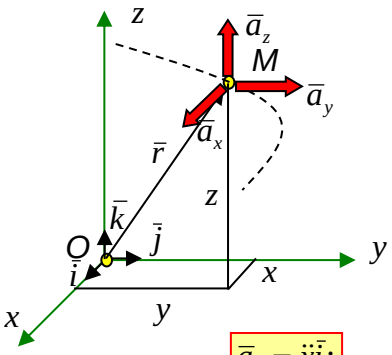
$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}_{cp}$ - Δtvaqt oralig'idaq`i o'rtacha tezlanish vektori traektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan.

Limitga o'tib qo`yidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ - Nuqtaning ***t***vaqtdagi haqiqiy tezlanish vektori. Agar nuqta birv tekislikda yotuvchi chiziq bo`ylab harakatlansa, $\bar{a}$ - tezlanishtraektoriyatekisligidayotib, traektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi.

Koordinatalar usuli: Hosil bo`lgan vektor ifoda va radius-vektor bilan koordinata orasidagi boq`lanishdan foydalanamiz



$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

$$\begin{array}{l} \bar{a}_x = \ddot{x}\bar{i}; \\ \bar{a}_y = \ddot{y}\bar{j}; \\ \bar{a}_z = \ddot{z}\bar{k}. \end{array}$$

Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi vektorining

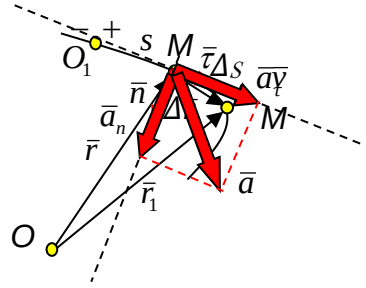
Tezlanish moduli:

$$\begin{array}{l} a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \\ \cos(\bar{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a}; \\ \cos(\bar{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a}. \end{array}$$

Tezlanishning tashkil etuvchilari:proekciyalari yo'nalishi:

$$\begin{array}{l} a_x = \ddot{x}; \\ a_y = \ddot{y}; \\ a_z = \ddot{z}. \end{array}$$

Tabiiy usul:



Tezlanishni vektori fodasi va harakat tabiiy usulda berilganda tezlikning ifodasidan foydalanamiz.

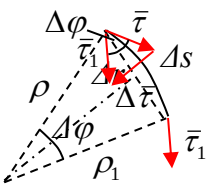
$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Birlik urinma vektorni murakkab funksiya ko`rinishida tasvirlaymiz. U holda birlik urinma $\bar{r}(t) = \bar{r}[s(t)].$

vektorning vaqt bo`yicha hosilasi bo`ladi. $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{ds}.$

Birlik urinma vektorning s yoy kordinatasi bo`yicha hosilasining kattaligi bo`ladi: $\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = \frac{1}{\rho}.$

Agar $\Delta s \to 0$ egrilikradiusi $\rho_1 \to \rho$, egrilik radiuslari orasidagi burchak $\varphi\Delta \to 0$. Bunda surat τ_1 va τ birlik vektorlari jrasidahosil bo`lgan teng yonli uchnurchakning asosi, mahraj esa ρ radiusli aylana yoyining uzunligi



Birlik vektorning $\Delta\tau$ orttirmasi va birlik vektor τ orasidagi burchak $\varphi\Delta \to 0$da u 90° ga intiladi.

Shunday qilib, birlik urinma vektoridan yoy kordinatasi bo`yicha olingan hosila vektor bo`lib, u troektoriyaga o`tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo`ladi. $a_{\tau\tau} = \ddot{s};$ $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$

Tezlanishning tabiiy o`qlardagi (τva*n*) proeksiyalari

Shunday qilib **nuqtaning to`liq tezlanishi** ikkita tezlanishning vektor yiq`indisidan iborat ekan; ularbirinchisi, agarda $\ddot{s} > 0$ bo`lsa, troektoriyaga urinma bo`ylab yoy koordinatasining o`sish tomoniga yo`nalgan (aks holda, yani $\ddot{s} \prec 0$ da yoy koordinatasining kamayish tomoniga yo`naladi) bo`ladi va **urinma tezlanish** deb ataladi, hamda ikkinchisi urinmaga normal bo`ylab egrilik markaziga (troektoriyaning botiq) tomoniga yo`nalgan **normal tezlanishdan** iboratdir:

$a = \sqrt{a_\tau^{\,2} + a_n^{\,2}};$ $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$

Nuqtaning to`liq tezlanishi moduli:

Egrilik markaziga yo`nalgan urinmaga normal (perpendikulyar) bo`lgan ***n*** birlik vektorini kiritamiz. ***n*** vektor va oldin aniqlangan qiymatlaridan foydalansak to`liq tezlanish vektorlarning yiq`indisi ko`rinishida ifodalanadi:

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{s}\,\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.}$$

Tezlanishning komponentalari

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{a}_\tau &= \ddot{s}\,\bar{\tau}; \\ \bar{a}_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}. \end{aligned}}$$

τ va n o`qlaridagi

Tashkil etuvchilari:proeksiyalari ***:***

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\tau\tau} &= \ddot{s}; \\ a_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \end{aligned}}$$

Nuqtaning teng o`lchovli o`zjaruvchan harakati

Nuqtaning teng o`lchovli o`zjaruvchan harakati – nuqtaning troektoriya bo`ylab qiladigan harakati. Bunday harakatda urinma tezlanish miqdori o`zgarmaydi ya`ni $\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s} = const.}$ bo'ladi.

Urinma tezlanishni tezlik proeksiyasi orqali ifodalaymiz: $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt}\dot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$

Hosil bo'lgan differensiyal tenglama o'zgaruvchilarni ajratish, hamda o'ng va chap tomonlarini integrallash yo'li bilan osongina echiladi:

$$dv_\tau = a_{\tau\tau}dt \qquad \int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_{\tau\tau}\int_0^t dt; \qquad v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_{\tau\tau}t\Big|_0^t; \qquad v_\tau - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau}t$$

- nuqtaning teng o'lchovli o'zgaruvchan harakatdagi tezligi

$\boxed{v_\tau = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t}$

O'z navbatida nuqta tezligi yoy koordinatasi orqali ham diffirencial bog'lanishga ega:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} \quad \text{yoki} \quad ds = v_\tau dt.$$

Bunga tezlik ifodasini qo'yib, integrallasak quyidagiga ega bo'lamiz: $\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t)dt; \quad s\Big|_{s_0}^{s} = (v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2})\Big|_0^t; \quad s - s_0 = v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}.$

Nuqtaning teng o’lchovli o’zgaruvchan harakatdagi yoy koordinatasi:

$$s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$$

Nuqta harakatining klassifikasiyasi

№ пп			Harakat ko’rinishlari	
			Harakat qonuni	Traektoriya
1	= 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	Teng o’lchovli (v = const)	To’g’ri chiziqli ($\rho = \infty$)
2	= 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	Teng o’lchovli (v = const)	Egri chiziqli ($\rho \neq \infty$)
2.1	= 0 t vaqtda	= 0 [t, t_1]	Ixtiyoriy t vaqtda teng o’lchovli emas ($v \neq$ onst), $v = max$	To’g’ri chiziqli ($\rho = \infty$)
2.2		≠ 0 [t, t_1]		Egri chiziqli ($\rho \neq \infty$)
3	≠ 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	Teng o’lchovli emas ($v \neq$ nst)	To’g’ri chiziqli ($\rho = \infty$)
3.1		= 0 t vaqtda	Harakat yo’nalishi o’zgaruvchan (v = 0 при t=t)	Ixtiyoriy traektoriya
3.2			Teng o’lchovli emas $v \neq$	Traektoriyada burilish ($\rho = \infty$
4	≠ 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	Teng o’lchovli emas ($v \neq$	Egri chiziqli ($\rho \neq \infty$)
5	= const [t,	ixtiyoriy	Teng o’zgaruvchan	Ixtiyoriy traektoriya

Nazorat savollari

1.Moddiy nuqtaning trayektoriya bo`yicha harakat qonuni yoki tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2.Moddiy nuqta harakati qanday usullarda beriladi?
3. Moddiy nuqta harakat grafigi nima?
4. Nuqtaning berilgan vaqtdagi tezligini yo`nalishi qanday va miqdori nimaga teng?
5.Tekis o`zgaruvchan harakat qonuni va grafigi qanday?
6. Harakatdagi nuqtaning tezlik vektori bilan radius- vektori orasida qanday bog`lanish bor?
7. Moddiy nuqta tezlanishi nima?

6- MA`RUZA

MAVZU: QATTIQ JISMNING ENG SODDA HARAKATLARI

Ma`ruza rejasi:

1. Qattiq jism kinematikasi
2. Qattiq jismning ilgarilanma harakati
3. Qattiq jismning aylanma harakati
4. Teng o'lchovli va teng o'zgaruvchan aylanishli aylanma harakat
5. Aylanma harakatda nuqtaning tezligi va tezlanishi.
6. Nuqtaning aylanma harakatdagi tezlik va tezlanishni vektor ko'paytma shaklida ifodalash
7. Nuqtaning markazga intilma tezlanishi

Qattiq jism kinematikasi- qattiq jism harakatini o'rganadi, nuqta kinematikasidan yangi bog'lanishlar va formulalar hosil qilish uchun foydalaniladi.

Qattiq jism harakatining besh xil ko'rinishi mavjud:

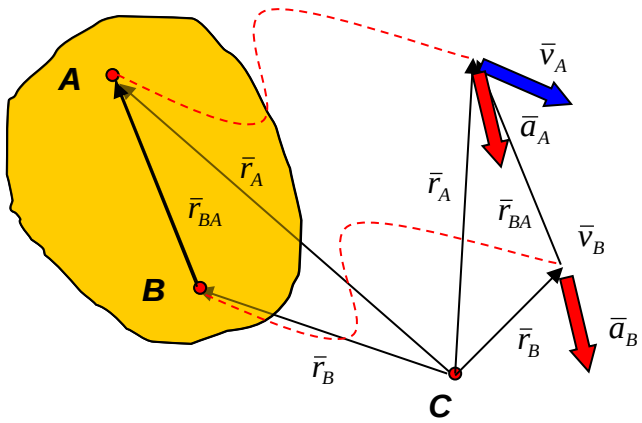
1.Ilgarilanma harakat (polzun, nasosporshini, yo'lning to'g'ri chiziqli qismida harakatlanuvchi paravoz g'ildiragining sparnig'i, liftkabinasi, kupeeshigi)

2. Aylana harakat (maxovik, krivoship, koromislo, oddiy eshik).

3.Tekis parallel yoki tekis harakat (shatun, relsning to'g'ri chiziqli qismida lokomativ g'ildiragining tebranib harakatlanishi, slifovka qiluvch ig'ildirak)

4.Sferik harakat (giroskop, sharnirli tayanch).

5.Harakatning umumiy holi yoki erkin uchish (o'q, snaryad, tosh, jism).



Qattiq jismning ilgarilanma harakati – bu shunday harakatki qattiq jismda olingan ixtiyoriy to'g'ri chiziq, harakat davomida o'z-o'ziga parallelligicha qoladi. Ilgarilama harakandagi jism nuqtasi to`q`ri chiziqli harakatdan iborat bo`ladi, lekin Umuman olganda ilgarilama harakatdagi jism nuqtasining troektoriyasi egri chiziqdan iborat.

Qattiq jismning ilgarilanma harakati haqidagi teorema. – Qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalari bir xil traektoriya chizadi va ixtiyoriy vaqtdagi tezlik va tezlanishlari o'zaro teng bo'ladi.

Ikkita A va B nuqtalarni radius vektorlarini o'tkazamiz, hamda bu nuqtalarni $\boldsymbol{r}_{BA}$-radius vektor bilan tutashtiramiz.

Ixtiyoriy vaqt davomida vektor tenglik bajariladi. $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}$.

Ixtiyoriy vaqt uchun ham $\mathbf{r_{BA}}$ vektorning qiymati va yo'nalishi doimo o'zgarmasdan qoladi,(ilgarilanma harakatning qoidasiga asosan) nuqtalar orasidagi masofa ham o'zgarmaydi ($\boldsymbol{r}_{BA}$= ***const)***, bundan: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const},$

Sunday qilib, qattiq jismning ilgarilanma harakati, qattiq jismda yotuvchi ixtiyoriy bir nuqtaning harakati orqali aniqlanadi. Bu nuqtaning hamma harakat parametrlari (traektoriyasi, tezlik va tezlanishlari) nuqta kinematikasining tenglama va munosabatlari orqali yoziladi.

(2) tenglamadan vaqt buyicha olingan birinchi tartibli hosila quyidagi munosabatni ifodalaydi

$$\frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} \qquad (3)$$

Bundan ko`rinadiki ixtiyoriy vaqt uchun *A nuqtaning tezlik vektori B nuqtaning tezlik vektoriga geometrik (vektor) teng bo`ladi*, ya'ni

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t). \qquad (4)$$

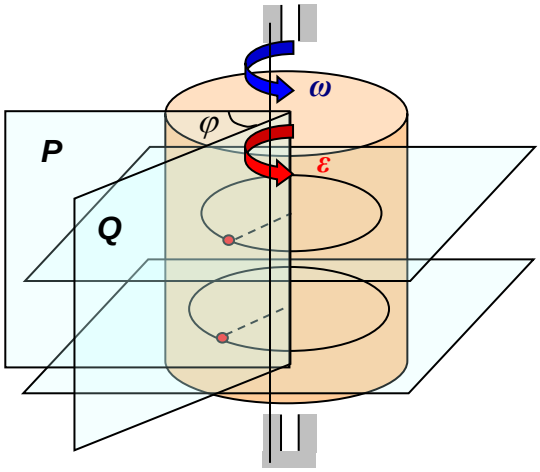
34) ni yana bir marta diffirensiyallab quyidagi munosabatni olamiz

$$\frac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2} \qquad (5)$$

Bu munosabat ixtiyoriy vaqt uchun *A nuqtaning tezlanish vektori B nuqtaning tezlanish vektoriga geometric (vektor) teng ekanligini ko`rsatadi*, ya'ni

$$\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t). \qquad (6)$$

Qattiq jismning aylanma harakati – bunda jismning barcha nuqtalari aylanish o'qi deb ataluvchi o'qqa nisbatan perpendikulyar tekislikda harakatlanadi va shu o'qda yotuvchi aylanalar chizadi



Aylanma harakatni berilishi– harakat aylanish o'q iorqali o'tuvchi qo'zg'almas tekislik bilan jism mahkam bog'langan Q tekisliklar orasidagi ikki yoqli φ burchak (aylanish burchagi) ning o'zgarish qonuni orqali beriladi, ya'ni

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (7)$$

munosabatga *qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasi yoki aylanish qonuni deyiladi*.

Burchak tezlik – aylanish burchagining qanchalik tez o'zgarishini harakterlovchi kattalik.

$$\begin{array}{l} t \qquad \Rightarrow \varphi; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi; \end{array}$$

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{cp}$ - Δt vaqt oralig'dagi o'rtacha burchak tezlik deb limitga o'tsak.

$\Delta t \to 0$ deb limitga o`tsak $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ yoki $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

bo`ladi. Bu ifoda (8) ga ***t*** vaqt oralig'idagi **haqiqiy burchak tezlik deyiladi**. *Burchak tezlik aylanish tomoniga yo'nalgan va yoy strelka bilan ifodalangan bo`ladi.*

Agarda $d\varphi/dt > 0$ bo'lsa, u holda aylanish aylanish burchagini oshishini ko'rsatadi.

Agarda $d\varphi/dt < 0$ bo'lsa, u holda aylanish aylanish burchagini kamayishini ko'rsatadi.

Burchak tezlanish – burchak tezlikni o'zgarish tezligini harakterlovchi kattalik.

$$\begin{array}{l} t \qquad \Rightarrow \omega; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega; \end{array} \qquad (9)$$

Bundan $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{cp}$ (10)

(10) munosabat Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha burchak tezlanishni ifodalaydi.

$\Delta t \to 0$ deblimitgao'tsak:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad (11)$$

hosilbo`ladi. (11) - munosabatga *t vaqt oralig'dagi haqiqiy burchak tezlanish deyiladi.*

Burchak tezlanish $\ddot{\varphi} > 0$ da aylanish burchagining o'sish tomoniga yo'nalgan yoy strelkasi bilan ifodalanadi.

Agarda $d^2\varphi/dt^2$ *va* $d\varphi/dt$ bir hil ishorali bo'lsa burchak tezlik moduli oshadi (kattalashadi) va aylanish tezlanuvchan bo'ladi (burchak tezlik va burchak tezlanishi yo'nalishi bir tomonga yo'nalgan bo'ladi).

Agarda $d^2\varphi/dt^2$ *va* $d\varphi/dt$ ishoralari har hil bo'lsa, tezlik moduli kamayadi va aylanish sekinlanuvchan bo'ladi (burchak tezlik va burchak tezlanish yo'nalishlari qarama-qarshi tomonga bo'ladi).

Teng o'lchovli aylanish – burchak tezlik kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni

$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$ $\omega = const.$ (12)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt;$$

bo'ladi.

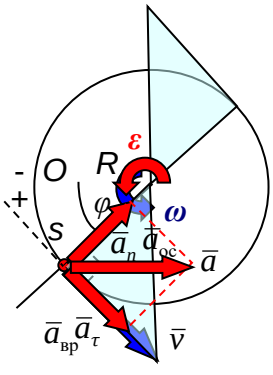
Teng o'zgaruvchan aylanish – burchak tezlanish kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni $\varepsilon = const.$ bo'ladi.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt; \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (13)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \qquad \textbf{(14)}$$

Qattiq jismning aylanma harakatida nuqtaning tezligi – nuqta traektoriyasi ma'lum (aylana radiusi R-nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa) nuqta tezligini aniqlash uchun tabiiy koordinatalar sistemasidan foydalanamiz:

$$v_\tau = \dot{s}. \qquad (15)$$



Yoy koordinata aylana radiusi bilan quyidagicha bog'lanishda bo'ladi: $s = \varphi R.$ (16)

U holda tezlikning aylanaga o'tkazilgan urunmadagi proeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$V_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt}\cdot R = \omega \cdot R \qquad (17) \qquad \boxed{v = \omega \cdot R}$$

Demak, tezlik moduli (17) formula bilan ifodalanadi va tezlik moduli aylana radiusiga perpendicular va burchak tezligi yo'nalishi bilan bir hil yo'naladi.

Bu formuladan ko'rinadiki nuqtaning tezligi aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi (aylanish radiusiga).

Qattiq jismning aylanma harakatida nuqtaning tezlanishi – nuqta traektoriyasi aniq, bunda nuqta tezlanishini aniqlash uchun harakatni tabiiy usulda berilishidagi formulalardan foydalanamiz.

$$\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s};\quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.} \qquad (18)$$

U holda tezlanish uchun tezlanishning o`qlarga o'tkazilgan urunma va normal o'qlardagi proeksiyalari quyidagicha bo'ladi.

$$a_\tau = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}R = \varepsilon R. \qquad (19)$$

$$a_n = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\varphi R)\right]^2 = \frac{1}{R}\left[\frac{d\varphi}{dt}R\right]^2 = \omega^2 R.$$

Urunma tezlanish uchun hisoblash formulasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\boxed{a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R} \qquad (20)$$

Bu tezlanish vektoriga ***aylanma tezlanish*** *deyiladi va radiusga perpendicular ravishda burchak tezlanish yoy strelkasi yo'nalishi bilan bir hil yo'naladi*.

Normal tezlanishga ***markazga intilma tezlanish*** *ham deyiladi va quyidagicha ifodalanadi*

$$\boxed{a_{\text{mi}} = \omega^2 \cdot R} \qquad (21)$$

Bu formulalardan ko'rinadiki, nuqtaning bu tezlanishlar nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi.

Nuqtaning to'la tezlanishi, bu tezlanishlarning bu tezlanishlarning vektor yig'indisi ko'rinishida aniqlanadi:

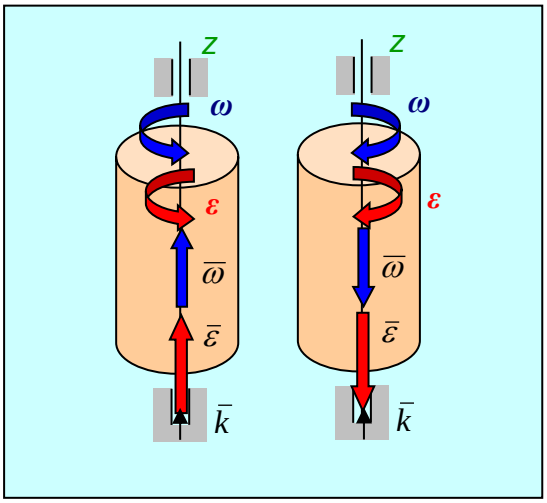
$$\bar{a} = \bar{a}_{ayl} + \bar{a}_{mi}. \qquad (22)$$

To`la tezlanish va radius yo`nalishlari **orasidagi burchak** radiusning qiymatiga bog`liq emas va quyidagi ifoda bilan aniqlanadi

$$\beta = arctg\left(\frac{a_{вр}}{a_{oc}}\right) = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

Nuqtaning aylanma harakatdagi tezlik va tezlanishni vektor ko'paytma shaklida ifodalash.

Burchak tezlik va burchak tezlanish vektori yo'nalishi vektor uchidan qaraganimizda yoy koordinata yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga teskari bo'lishi kerak.



Z o'qining musbat yo'nalishini **k** birlik vektor yordamida berish mumkin, u holda burchak tezlanishni quyidagicha mumkin:

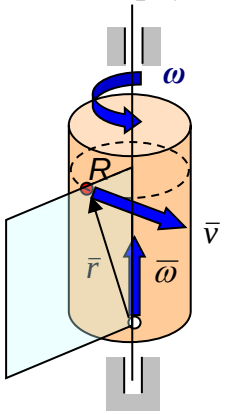
$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k} \qquad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k} \qquad (24)$$

Bunda **ωz, εz** lar mos vektorlarning z o'qidagi proeksiyalari.

Aylanma harakatdagi nuqta tezligini

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (25)$$

vektor ko'paytma orqali aniqlanadi va tezlikning kattaligi va yo'nalishini ifodalaydi.

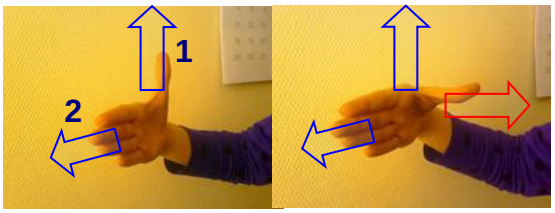


Bu vektor ko'paytmaning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \sin(\bar{\omega}, \bar{r}).$$

yoki

$$v = \omega \cdot R.$$



Vektor ko`paytmadan hosil bo`lgan vektor yo`nalishi ikki usulda aniqlanadi:

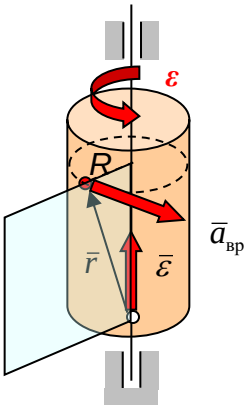
1. Vektor ko`paytmaning aniqlanishi bo`yicha – vector yo`nalishi ko`paytmani tashkil etuvchi vektorlardan o`tkazilgan tekislikka perpendikulyar bo`lib, u birinchi vektorni ikkinchi vektorga qarab soat millariga teskari yo`nalishda va eng qisqa burchak bo`ylab burishdan hosil bo`lgan yo`nalishda yo`nalgan bo`ladi.

2. O`ng qo`l qoidasiga asosan quyidagich topiladi. Agar bosh barmoqni ko`paytmaning birinchi vektori yo`nalishda, qolgan barmoqlarni ikkinchi vektor bo`yicha yo`naltirsak va bosh barmoqni kaftimuzga perpendikulyar bo`lguncha bursak shu bosh barmoq yo`nalishi vektor ko`paytma vektori yo`nalishi bilan ustma-ust tushadi.

Shunday qilib, burchak tezlik va radius vektorining vektorial ko'paytmasi oldin olingan natijalarga ko'ra aylanma harakatdagi nuqta tezligini kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi

$$\bar{a}_{вр} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$$

Nuqtaning aylanma tezlanishi (27)



vektor ko`paytma orqali va aylanma harakat kattaligi va yo`nalishini aniqlaydi.

Bu vektor

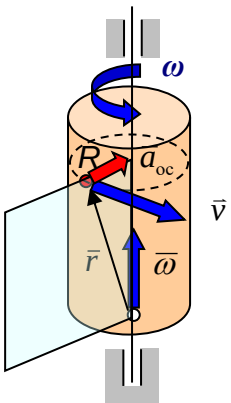
$$|\bar{a}_{вр}| = |\bar{\varepsilon}| \cdot |\bar{r}| \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}).$$

ko`paytmaning kattaligi (moduli):

(28)

$$a_{вр} = \varepsilon \cdot R.$$

Shunday qilib: *Qaralayotgan vektor ko`paytma vektorining yo`nalishi vektor ko`paytmaning ta`rifidan yoki o`ng qo`l qoidasidan aniqlash mumkin.*



Shunday qilib, burchak tezlanish va radius vektorining vektorial ko'paytmasi oldin olingan natijalarga ko'ra nuqtaning aylanma harakatdagi tezlanishini kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi.

Nuqtaning markazga intilma tezlanishi

(29)

Nuqtaning markazga intilma tezlanishi $\bar{a}_{\text{mi}} = \bar{\omega} \times \bar{v}$

Vector ko'paytma orqali aniqlanadi. Bu vector markazga intilma tezlanishning yo'nalishi va kattaligini aniqlaydi.

Vektor ko'paytmaning kattaligi (moduli):

$$|\bar{a}_{\text{oc}}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{v}| \sin(\bar{\omega}, \bar{v}). \quad \Rightarrow 1 \qquad (30)$$

chunki nuqtaning tezlik vektori burchak tezlik yotgan tekislikka perpendikulyar bo`ladi, shu sababli u quyidagicha aniqlanadi:

(31) $a_{mi} = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R.$

Bu vektor ko'paytmaning yo'nalishini vektor ko'paytmaning ta'rifidan yoki o'ng qo'l qoydasidan foydalanib aniqlash mumkin.

Shunday qilib haqiqatdan ham nuqtaning burchak tezligi bilan tezlik vektorining vektorial ko'paytmasi oldin olingan natigalarga ko'ra nuqtaning markazga intilish tezlanishining kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi.

Bu vektor ko'paytmani quyidagicha yozish ham mumkin: $\bar{a}_{\text{oc}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

Nazorat savollari

1.Jismning ilgarilma harakati qanday ta'riflanadi?
2.Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining harakati haqidagi teoremani ta'riflang.
3.Qattiq jismning aylanma harakati deb nimaga aytiladi?
4.Qattiq jismning qo`zg'almas o`q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki tenglamasini yozing.
5.Burchak tezligi va burchak tezlanishi nima? Ular o`lchov biriklari qanday?
6.Chiziqli tezlik qanday aniqlanadi?
7.Chiziqli tezlik vektor ifodsi qanday?
8.Chiziqli tezlikning Dekart koordinata o`qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
9.Chiziqli tezlanish nima? Uni vektor ifodasini yozing.
10.Chiziqli tezlanish vektorini Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyasi ifodasini yozing.
11.Qo`zg'almas o`q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtasining urinma va normal (markazga intilma) tezlanishi qanday ifodalanadi?

7 – MA`RUZA

MAVZU: QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS NUQTA ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI.

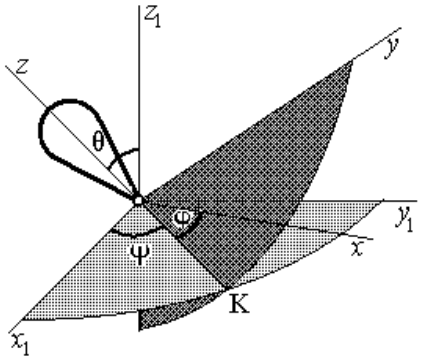
Reja:

1. Bir nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan qattiq jismning harakati.
2. Eylerning kinematik tenglamalarixe "Sferik harakat: Eylerning kinematik tenglamalari:".
3. Qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari
4. Erkin qattiq jismning umumiy holdagi harakati

Tayanch iboralar: *Bir nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan qattiq jismning harakati. Eylerning kinematik tenglamalarixe "Sferik harakat: Eylerning kinematik tenglamalari:".Qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari, Erkin qattiq jismning umumiy holdagi harakat.*

Bir nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan qattiq jismning harakati.

Birorta O nuqtasi qo'zg'almas qilib mahkamlangan qattiq jismning $Ox_1y_1z_1$ -o'qlarga nisbatan harakatini ko'rib chiqamiz. Bunday harakatga, pildirak (volchok) va shunga o'xshash harakat qiluvchi boshqa jismlar misol bo'la olishi mumkin,
chunki ularning har biri o'zining bitta nuqtasi bilan taya'nib turadilar va shu nuqta atrofida harakat qiladilar.



7.1. shakl

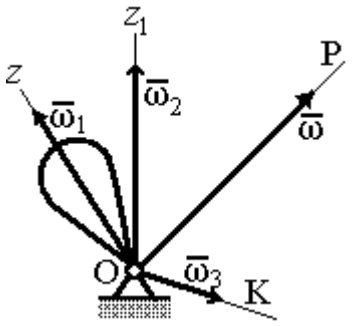
1. Harakat tenglamasi "Sferik harakat: tenglamasi:". Bir nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan jismning holatini aniqlovchi parametrlarni ko'rib o'taylik. Buning uchun jism bilan birgalikda harakat qiluvchi va unga mahkam bog'langan, qo'zg'aluvchi Oxyz -o'qlarni o'tkazaylik. U holda jismning holati shu o'qning holati orqali o'rganiladi (7.1- shakl). Oxy tekisligi bilan Ox_1y_1 -tekiligining kesishgan chizig'i *tugunlar chizig'i* deb ataladi. U holda jismning yoki unga mahkam bog'langan Oxyz -o'qlarning $Ox_1y_1z_1$ -o'qlardagi o'rnini quyidagi burchaklar orqali aniqlash mumkin:

$$j=ÐKOx,\ y=Ðx_1OK,\ q=Ðz_1Oz.$$

Ushbu burchaklar, Eyler burchaklarixe "Sferik harakat: Eyler burchaklari:" deb ataladilar va osmon mexanikasida tegishlicha quyidagi nomlar bilan ataladilar: j - *xususiy aylanish burchagi*, y -*pretsessiya burchagi*, q - *nutatsiiya burchagi*. Ushbu burchaklarning musbat yo'nalishlari 2- shakldagi strelkalar orqali tasvirlangan.

Jismning harakatini aniqlash uchun, ixtiyoriy vaqt uchun $Ox_1y_1z_1$ -o'qlardagi holatini bilish zarur, yoki quyidagi tenglamalar aniq bo'lishi zarur:

$$j=f_1(t),\ y=f_2(t),\ q=f_3(t)\ \textit{(7.1)}$$



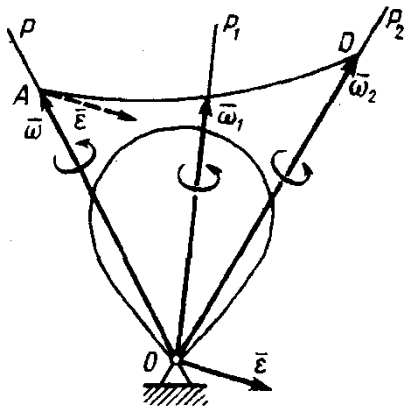
7.2-shakl

Ushbu(7.1) tenglamalar orqali jismning harakatini aniqlash mumkin. Shu sababli bu tenglamalarni *bir nuqtasi qo'zg'almas jismning harakat tenglamalari* deb ataladi.

2. Jismning burchakli tezligi "Sferik harakat: burchakli tezligi:". Agarda jism faqat Oz -o'qi atrofida (xususiy aylanish) j -burchakka burilib harakat qilsa, uning burchakli tezligi $\omega_1 = \dot{\varphi}$ bo'ladi; agar jism faqat Oz_1 -o'qi atrofida y (pretsessiya) burchakka burilsa, uning burchakli tezligi $\omega_2 = \dot{\psi}$ bo'ladi; agar jism faqat OK -tugunlar chizig'i (nutatsiya) atrofida q -burchakka aylansa, uning burchakli tezligi $\omega_3 = \dot{\theta}$ bo'ladi; $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ -burchakli tezliklar tegishli ravishda Oz, Oz_1 va OK o'qlar (7. 2- shakl) bo'yicha yo'naladilar. Umuman olganda qattiq jismning harakatida hamma burchaklar bo'yicha ham burilish mumkin ekanligini hisobga olsak, jismning umumiy burchakli tezligi w, uchala burchakli tezliklarning geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi. Shunday qilib, $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$ -ga teng bo'ladi.

Lekin $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ -burchakli tezliklarning qiymatlari jismning harakatiga bog'liq ravishda, ham son qiymatlari bo'yicha, ham yo'nalishlari bo'yicha uzluksiz o'zgarib turishlari mumkin. Shu sababli $\overline{\omega}$ - *oniy burchakli tezlik* deb ataladi.

3. Jism harakatining geometric ko'rinishi. Agar jism shu daqiqada w-burchakli tezlik bilan harakat qilayotgan bo'lsa, uholda elementar dt -vaqt ichida w-vektori bo'ylab yo'nalgan OR o'q atrofida elementar dh=w×dt burchakka buriladi (142- shakl). Bu o'q *oniy aylanish o'qi* deb ataladi. Demak, oniy aylanish o'qi, shunday o'q ekanki jism shu o'q atrofida hozirgi holatidan cheksiz kichkina bo'lgan qo'shni holatga o'tar ekan. Qo'zg'almas o'q bilan oniy aylanish o'qining farqi shundaki, oniy aylanish o'qi o'zining fazodagi holatini muntazam o'zgartirib boradi.



7. 3-shakl

Jism OR oniy o'q atrofida cheksiz kichkina burchakka burilgandan so'ng, u yangi OR_1-oniy aylanish o'qi bo'ylab undan keyingi elementar burchakka buriladi va h. Shunday qilib, jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakati, qo'zg'almas nuqtadan

o’tuvchi cheksiz sonli oniy aylanish o’qlari atrofidagi qator elementar burilishlardan iborat bo’lar ekan (7.3-shakl).

5. Jismning burchakli tezlanishixe "Sferik harakat: burchakli tezlanish:". Elementar vaqt mobaynida burchakli tezlikning son qiymati va yo’nalishini o’zgarishini belgilovchi,

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega} / dt \qquad 7(.2)$$

vektor qiymat, jismning *shu ondagi burchakli tezlanish*i, yoki *oniy burchakli tezlanish* deb ataladi.

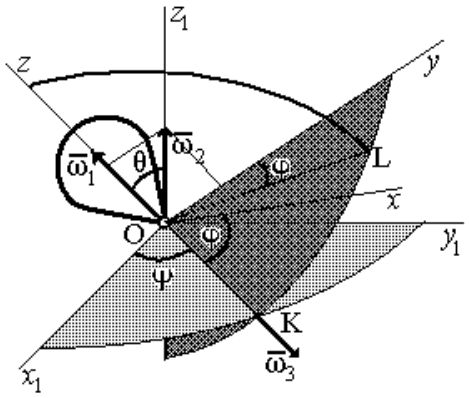
Jismning burchakli tezlik vektori $\bar{\omega}$-ning uchi vaqt mobaynidagi yo’nalishi va modulining o’zgarishiga bog’liq ravishda fazoda qandaydir egri chiziqli AD iz qoldiradi, ushbu izni $\bar{\omega}$-vektorning *godografi* deb ataladi (7.3- shakl). U holda (7.2) tenglikni $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ formula bilan solishtirib, shuni aniqlaymizki, jismning burchakli tezlanish vektori - $\bar{\varepsilon}$, burchakli tezlik vektori $\bar{\omega}$-ning uchini AD egri chiziq bo’ylab qilgan harakatidagi tezlik vektoridan iborat ekan.

Ko’rinib turganidek, xususiy holdagi kabi, ya’ni jismning qo’zg’almas o’q atrofidagi aylanma harakatidagiga o’xshab, $\bar{\omega}$ va $\bar{\varepsilon}$ vektorlari bir to’g’ri chiziq bo’ylab yo’nalmas ekanlar.

Bir nuqtasi qo’zg’almas bo’lgan jismning harakatida $\bar{\omega}$ va $\bar{\varepsilon}$ vektorlar asosiy kinematik xarakteristikalar bo’lib xizmat qiladilar. Agar harakat tenglamalari berilgan bo’lsa, $\bar{\omega}$ va $\bar{\varepsilon}$ larni hisoblab chiqarish mumkin bo’ladi. Burchakli tezlik $\bar{\omega}$ vektorini geometrik usul bilan ham hisoblash mumkin .

Eylerning kinematik tenglamalarix "Sferik harakat: Eylerning kinematik tenglamalari:"

Burchakli tezlik vektori $\overline{\omega}$-ni aniqlash uchun, uning qo'zg'aluvchi Oxyz -



7.4-shakl.

o'qlardagi proektsiyalarini aniqlaymiz (7.4- shakl). burchakli tezlik vektorini quyidagicha ifodalaymiz,

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 \quad (7..3)$$

Son qiymatlari,

$$w_1 = \varphi', \; w_2 = \psi', \; w_3 = \theta' \quad (7.4)$$

(7.3) tenglamaningikkalatarafinix, y, z -o'qlargaproektsiyalab,

$$w_x = w_{1x} + w_{2x} + w_{3x},$$
$$w_y = w_{1y} + w_{2y} + w_{3y},$$
$$w_z = w_{1z} + w_{2z} + w_{3z} \quad (7.4)$$

$\overline{\omega}_1$ va $\overline{\omega}_2$ -vektorlarning proektsiyalarini hoziroq aniqlash mumkin:

$$w_{1x} = w_{1u} = 0, \; w_{1z} = \varphi', \; w_{3z} = \theta' \times \cos j,$$
$$w_{3u} = -\theta' \times \sin j, \; w_{3z} = 0$$

$\overline{\omega}_2$ -vektorning proektsiyasini aniqlash uchun Oz_1 va Oz o'qlardan o'tuvchi tekislik bilan Oxy tekisligining kesishgan chizig'ida yotuvchi OL o'qni o'tkazamiz. OK chizig'i zOz_1 -tekisligiga perpendikulyar bo'lganligi uchun, u OL chizig'iga ham perpendikulyar bo'ladi (ÐKOL=90° va ÐLOy=j). U holda, $\overline{\omega}_2$ -vektorni OL chizig'iga proektsiyalab va shu proektsiya'ni o'z navbatida Ox va Ou o'qlarga proektsiyalasak:

$$w_{2x}=\psi' \times sinq \times sinj,\ w_{2y}=\psi' \times sinq \times cosj,\ w_{2z}=\psi' \times cosq$$

Ushbu aniqlangan qiymatlarni (15.4) formulaga qo'ysak,

$$\begin{aligned} w_x &= \psi' \times sinq \times sinj + \theta' \times cosj \\ w_y &= \psi' \times sinq \times cosj - \theta' \times sinj \qquad (7.5) \\ w_z &= \varphi' + \psi' \times cosq \end{aligned}$$

(7.5) tenglamalar sistemasi *Eylerning kinematik tenglamalarixe "Sferik harakat: Eylerning kinematik tenglamalari:"* deb ataladi.

Bu tenglamalar sistemasi $\overline{\omega}$-vektorning Eyler burchaklarixe "Sferik harakat: Eyler burchaklari:" orqali ifodalangan qo'zg'aluvchi Oxyz o'qlardagi proektsiyalari hisoblanadi; bular orqali $\overline{\omega}$-vektori aniqlanadi.

Shunga o'xshab $\overline{\omega}$-vektorning qo'zg'almas $Ox_1y_1z_1$ -o'qlardagi proektsiyalarini ham aniqlash mumkin bo'ladi. Ular quyidagilardan iborat bo'ladi:

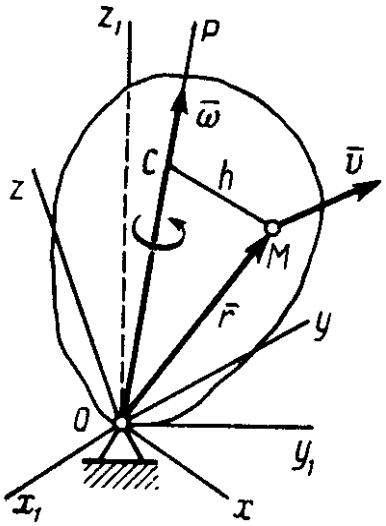
$$\begin{aligned} w_{x1} &= \varphi' \times sinq \times siny + \theta' \times cosy \\ w_{y1} &= -\varphi' \times sinq \times cosy + \theta' \times siny \qquad (7.6) \\ w_{z1} &= \varphi' \times cosq + \psi' \end{aligned}$$

(7.6) formulalardan foydalanib, burchakli tezlanish vektori $\overline{\varepsilon}$-ning qo'zg'almas $Ox_1y_1z_1$ -o'qlardagi proektsiyalarini ham aniqlash mumkin bo'ladi. $\overline{\varepsilon}$-ning qiymatlari(7.3) formulalar orqali aniqlanishini e'tiborga olsak[1]:

$$e_{x1}=\omega'_{x1},\ e_{y1}=\omega'_{y1},\ e_{z1}=\omega'_{z1} \quad (7.7)$$

Ushbu proektsiyalar orqali burchakli tezlanish vektori $\bar{\varepsilon}$ aniqlanadi. Shunday qilib, jismning harakat tenglamalari(7.1) -ni bilgan holda, yuqoridagi formulalar orqali $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{\omega}$ larni hisoblash mumkin ekan.

Qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari



7.5-shakl

Yuqorida aniqlandiki, agar jism qo'zg'almas nuqta atrofida harakatlansa, u har bir daqiqada yangi-yangi oniy aylanish OR -o'qlari atrofida oniy burchakli tezlik bilan aylanma harakatda bo'lar ekan (7.5-shakl). Demak, bunday harakatdagi jismning ixtiyoriy nuqtasining tezligi formula orqali aniqlanadi, ya'ni

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (7.8)$$

bu erda $\bar{r}$ - qo'zg'almas O nuqtadan M nuqtaga o'tkazilagan radius vektor. Nuqtaning tezlik vektori M nuqta va OP o'qni kesib o'tuvchi MOP tekislikka perpendikulyar bo'lib, jismning aylanayotgan tomoniga yo'nalgan bo'ladi. Son qiymati (moduli) bo'yicha,

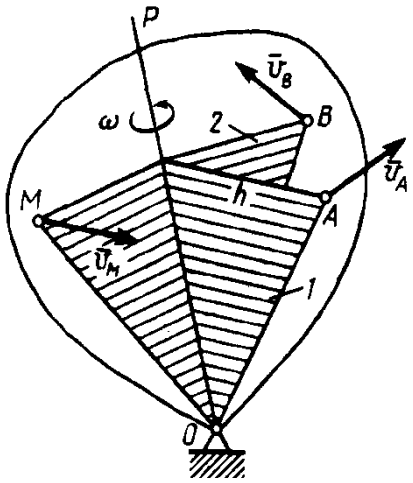
$$v=w\times h \quad (7.9)$$

bu erdagi h=MC, M nuqtadan oniy aylanish o'qigacha bo'lgan masofa.

Jism M nuqtasining shu ondagi tezligini geometrik usulda aniqlash uchun, uning boshqa birorta A nuqtasining tezlik vektori $\bar{V}_A$ - ni va ixtiyoriy B nuqtasining

tezligini yo’nalishi ma’lum bo’lishi shart. Aytaylik, jismning tezlik vektori - $\overline{V}_A$ va B nuqtasi tezligining yo’nalishi ma’lum bo’lsin. U holda, A nuqtadan $\overline{V}_A$-vektorga perpendikulyar bo’lgan 1 -tekislik o’tkazamiz (7.6- shakl). Yuqorida ta’kidlanganidek (7. 5- shakl), OR -oniy aylanish o’qi shu tekislikda yotadi. Lekin oniy aylanish o’qi - OR bir vaqtning o’zida B nuqtadan $\overline{V}_B$ vektorga perpendikulyar bo’lgan 2-tekislikda ham yotishi shart.

Demak, shu 1 va 2 tekisliklarning o’zaro kesishgan chizig’i oniy aylanish o’qi OR dan iborat bo’ladi. A nuqtadan OR o’qqacha bo’lgan qisqa masofa h-ni hisoblab olib, (76') formula orqali shu jismning oniy burchakli tezligi w -ni aniqlaymiz: $w=v_A/h$.



7.6-shakl

So’ngra, jismning ixtiyoriy M nuqtasi tezligining son qiymati -v_M (7.9) formula orqali hisoblanadi, uning yo’nalishi esa OMR tekisligiga perpendikulyar bo’ladi.

Xususiy holda, masalan, jismning birorta nuqtasining shu ondagi tezligi nolga teng bo’lsa, u holda shu nuqta va qo’zg’almas O nuqtadan o’tuvchi chiziq, oniy aylanishlar o’qi hisoblanadi, natijada masalalarni echish ancha soddalashadi .

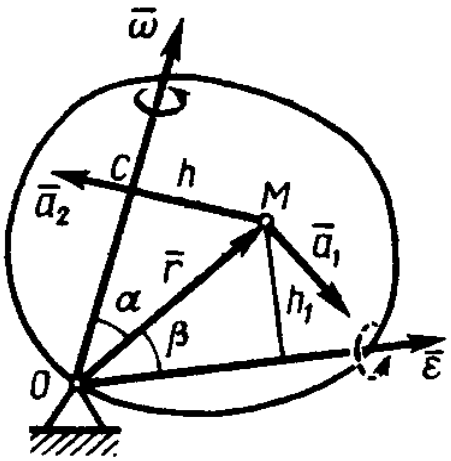
Tezliklarni analitik usulda hisoblashda $\overline{V}$- tezlikning koordinata o’qlaridagi proektsiyalari orqali aniqlanadi. Ixtiyoriy nuqtaning tezligi $\overline{V}$-ni jism bilan birgalikda harakat qilayotgan Oxyz o’qlardagi proektsiyalarini aniqlaylik (7.6 shakl); bu o’qlarning afzallik tomoni shundaki, ixtiyoriy nuqtaning bu o’qlardagi koordinatalari o’zgarmas qiymatlardan iborat bo’ladi. Masalan, $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$ bo’lganligi uchun, vektorlar algebrasidagi qoidaga asosan

$$\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

Aniqlovchilarni birinchi qator elementlari bo'yicha yoyib chiqsak va $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$ ekanligini etiborga olsak, $\bar{i}$, $\bar{j}$ va $\bar{k}$ birlik ortlarning oldidagi koeffitsientlar tegishlicha v_x, v_y , v_z bo'lsa, ularning har biri uchun quyidagilarni yozamiz,

$$v_x=w_yz-w_zy,\ v_y=w_zx-w_xz,\ v_z=w_xy-w_yz \quad (7.10)$$

Ushbu formulalarni (7.8) formula kabi *Eyler formulalari* deb ataladi. Har-bir



7.7- shakl

tenglikni olish uchun o'zidan oldingi tenglikdagi x, y, z -harflarni aylantirib qo'yish orqali olish mumkin bo'ladi .

(7.10) formula xususiy holda, qattiq jismning qo'zg'almas z -o'qi atrofidagi aylanma harakatida ham o'rinli bo'ladi. U holda $w_x=w_y=0$ va $w_z=w$ bo'ladi, hamda

$$v_x=-wy\ v_y=wx\ v_z=0 \quad (7.11)$$

M nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz. (7.8) tenglamaning ikkala tarafidan vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak,

$$\bar{a} = \bar{v}' = (\bar{\omega}' \cdot \bar{r}) + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}')$$

$\bar{a}$ hamda $\bar{\omega}' = \bar{\varepsilon}$ va $\bar{r}' = \bar{v}$ ekanligini e'tiborga olsak yuqoridagi tenglik,

$$\bar{a} = \bar{v}' = (\bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}) + (\bar{\omega} \cdot \bar{v}) \qquad (7.12)$$

$\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ -tezlanish, aylanma tezlanish deb ham aytiladi,

$\bar{a}_2 = \bar{\omega} \times \bar{V}$ -tezlanish esa M nuqtaning o'qqa intilma tezlanishi deb ataladi.

$\bar{a}_1$ -tezlanishning yo'nalishi M nuqta va $\bar{\varepsilon}$ -vektoridan o'tuvchi tekislikka perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'ladi (7.7- shakl), uning moduli esa

a_1=e×r×sinb=e×h_1 , bu erda h_1- M nuqtadan $\bar{\varepsilon}$ -vektorining ta'sir chizig'igacha bo'lgan masofa. $\bar{a}_2$ -vektor esa $\bar{\omega}$ va $\bar{V}$ -vektorlari yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda MC chiziq bo'ylab yo'naladi (7.7- shakl), moduli esa

a_2=w×v×sin90°=w^2×h, chunki v=w×h.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki bu erdagi $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ -tezlanish vektori M nuqtaning urinma tezlanishi (urinma o'q bo'ylab tezlik vektori $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ yo'naladi, $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ -vektorning yo'nalishi esa boshqacha) bo'lmaydi; shu sababli $\bar{\omega} \times \bar{V}$ tezlanish ham M nuqtaniing normal tezlanishi bo'lmaydi.

8 – MA`RUZA

MAVZU: QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

Ma`ruza rejasi:

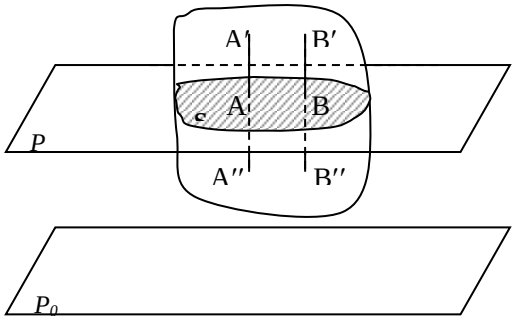
1. Qattiq jismning tekis parallel harakati haqida teorema.
2. Tekis shakl harakat tenglamasi.
3. Tekis shakl tezliklarini qo`shish haqidagi teorema.
4. Tekis shakl tezlanishlarini qo`shish haqidagi teorema.
5. Tezlikning oniy markazi.
6. Tezlanishning oniy markazi.

1.Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

Tarif: *Qattiq jismning tekislikka parallel harakati deb, shunday harakatga aytiladiki, shu qattiq jismda olingan ixtiyoriy tekislik harakat davomida har doim birorta qo'zgalmas tekislikka paralleligini saqlab qolaveradi.*

Qattiq jism harakatlanganda uning hamma nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlansa, qattiq jismning bunday harakatiga tekis-parallel harakat deyiladi 8.1-shakl). Jismni P_0 tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy P tekislik bilan qirqamiz. Natijada P tekislikda S qirqim yuza hosil bo'ladi. Bu yuzani tekis shakl deb ataladi. Tekis shakl hamma vaqt P tekislikda harakatlanadi.

Demak qattiq jism tekis parallel harakatini o'rganish uchun, jismda P_0 qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan S yuzaning (tekis shaklning) P tekislikdagi harakatini bilsak kifoya. Kinematikada qattiq jismning tekis parallel harakati sohasida yuritiladigan mulohazalar mashina va mexanizmlarning va ularning ayrim qismlarining harakatini o'rganishda nazariy baza sifatida qo'llaniladi. Shuning uchun qattiq jismning tekis parallel harakati kinematikaning asosiy qismi bo'lib, bu qismni ayrim o'rganiladi. Tekis shakl harakatlanadigan tekislikka tekis shaklning harakat tekisligi deyiladi. Tekis shaklning harakat tekisligida joylashgan qo'zg'almas OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakatini o'rganamiz.

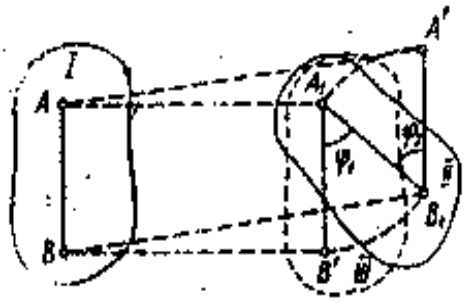


8.1-shakl

Tekis shakl S ning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan vaziyati unda olingan ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi AB kesmaning va ziyati bilan aniqlanadi. Biroq AB kesmaning qo'zg'almas sistemaga nisbatan vaziyati uning

biror nuqtasining koordinatalari va bu kesmaning OX o'qi bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Bunday nuqtaga *qutb nuqta* deyiladi.

Teorema:*Tekis shaklning harakat tekisligidagi har qanday harakatini ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma harakatdan va shu qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin (8.2-shakl*).



8.2-shakl

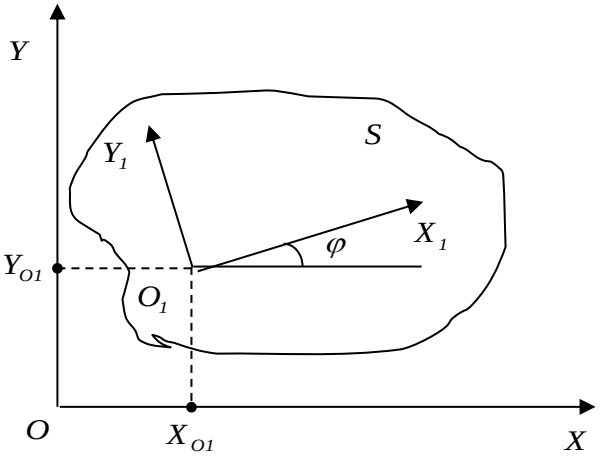
Biz yuqorida bir gal A, ikkinchi galda B nuqtani qutb deb oldik A va B lar ixtiyoriy nuqtalar bo'lgani uchun qutb nuqtani tanlab olish ixtiyoriy bo'ladi. Tekis shaklni ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq. Masalan yuqorida A nuqtani qutb nuqta uchun olganimizda S ni nuqtalari ilgarilanma harakat natijasida AA' masofaga ko'chgan bo'lsa, B nuqtani qutb uchun olganimizda BB' masofaga ko'chadi. Biroq AA'≠BB' aks holda (AA'=BB') tekis shakl faqat ilgarilanma harakat qiladi. Shakldan $AB \neq A_1B'$ va $AB \neq A'B_1$ bo'lgandan $A_1B' \neq A'B_1$ bo'ladi. Har ikki holda $\angle B'AB_1 = \angle A'B_1A_1$: ya'ni $\varphi_1 = \varphi_2$. Bundan tekis shaklni har ikki qutb nuqta atrofida aylanish yo'nalishi va aylanish burchagi bir xilda ekanligini ko'ramiz. Demak tekis shaklning ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq, ammo aylanma harakati qutb nuqtani tanlashga bog'liq bo'lmaydi.

Tekis shaklning harakat tenglamalari

Tekis shakl S ni harakat tekisligida joylashgan OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatini tekshiramiz. Qutb nuqta uchun S ning biror O nuqtasini ixtiyoriy tanlab olamiz. Shu O_1 nuqtada S bilan mahkam bog'langan, u bilan birga harakatlanuvchi $O_1X_1Y_1$koordinata sistemasini o'tkazamiz. $O_1X_1Y_1$ koordinata sistemasini OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakati S ni OXY ga nisbatan harakatini ifodalaydi. $O_1X_1Y_1$ ning OXY ga nisbatan holati O_1 ni X_{o1}, Y_{o1} koordinatalari hamda OX ning O_1X_1bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Vaqt o'tishi bilan S harakatlanganda X_{01}, Y_{o1} va φ lar t vaqtning funksiyasi shaklida o'zgaradi (8.3-shakl). Ya'ni

$$\left.\begin{aligned} X_{01} &= f_1(t) \\ Y_{01} &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

bo'ladi. X_{01}, Y_{o1} va φ lar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. (10.1) tenglamalar berilgan bo'lsa, istalgan t vaqt uchun S ning XY tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. (8.1) tenglamalar tekis shaklning harakat tenglamalari deyiladi. Agar harakat davomida φ=const bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$ koordinata o'qlari o'zlarining boslang'ich holatiga doimo parallel harakatlanadi.



8.3-shakl

S ilgarilanma harakatda bo'ladi. Agar X_{01},Y_{01}=const bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$koordinata o'qlari O_1 nuqta atrofida aylanma harakat qiladi. φ aylanish burchagini OX dan boshlab soat milining aylanish tomoniga teskari aylanishda hisoblanadi. Shunday qilib S ning qo'zg'almas XY tekisligidagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi.

(8.1) tenglamalarning birinchi ikkitasi S tekis shaklning ilgarilanma harakatini, uchinchisi S ning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi. Agar (8.1) berilgan bo'lsa, ularni birinchi ikkitasidan t bo'yicha bir marta hosila olib, S ning ilgarilanma harakat ϑ tezligini topamiz:

$$\vartheta_{0_1x} = f_1'(t);\ \vartheta_{0_1y} = f_2'(t)$$

bunda

$$\vartheta_{0_1} = \sqrt{\dot{X}^2_{0_1} + \dot{Y}^2_{0_1}} = \sqrt{\vartheta^2_{o_1x} + \vartheta^2_{o_1y}}$$

Agar (8.1) ning uchinchi tenglamasidan t vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, S tekis shaklning O_1 nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ωni va ikki marta hosila olsak, burchak tezlanishi ε ni topamiz.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};\ \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

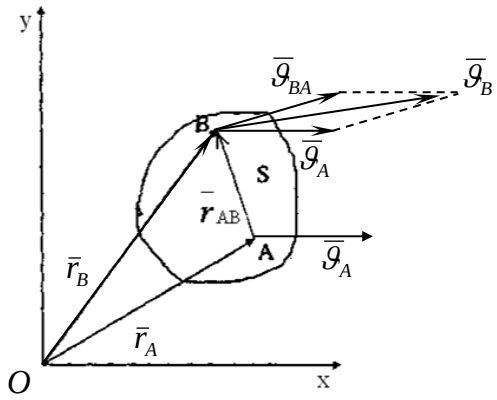
Demak S tekis shakl harakat tekisligidagi harakati ixtiyoriy tanlab olingan O_1qutb nuqtasining tezligi bilan ilgarilanma va O_1 qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topadi. S tekis shakl OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan bir vaqtda ikki harakatda ishtirok etadi. Shuning uchun S ning OXY ga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat deb qarash mumkin. S ning ilgarilanma harakati ko'chirma, uning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakati nisbiy harakat bo'ladi.

Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash.

Tekis shaklning XY tekisligidagi harakatini tekshiramiz (8.4-shakl). S ning biror A nuqtasini qutb uchun tanlab, uning radius vektorini $\bar{r}_A$ bilan belgilaymiz, S ning ixtiyoriy B nuqtasining radius vektori $\bar{r}_B$. Yuqorida isbotlangan teoremaga asosan

$$\bar{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \qquad (8.2)$$

bo'ladi.



8.4-shakl

Bunda $\bar{r}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofida aylanma (nisbiy) harakat radius vektori. Nuqta harakatlanganda uning radius vektori t vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi. B nuqtaning tezligi (8.2) dan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} \qquad (8.3)$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\vartheta}_B;\ \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\vartheta}_A;\ \frac{d\bar{r}AB}{dt} = \bar{\vartheta}_{AB}$$

bunda $\bar{\vartheta}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofidagi nisbiy (aylanma) harakat tezligi. Aylanma harakat tezligi, aylanma harakat ω burchak tezlik vektorining aylanish radius vektoriga vektorlik ko'paytmasiga teng ekanligi bizga ma'lum

$$\bar{\vartheta}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB};$$

Bunda $\bar{\omega} \perp AB$ bo'lgani uchun ϑ_{BA} ning miqdori $\vartheta_{BA}=\omega$ AB bo'ladi. Bularning qiymatlarini (8.3) ga qo'ysak quyidagi tenglikni olamiz

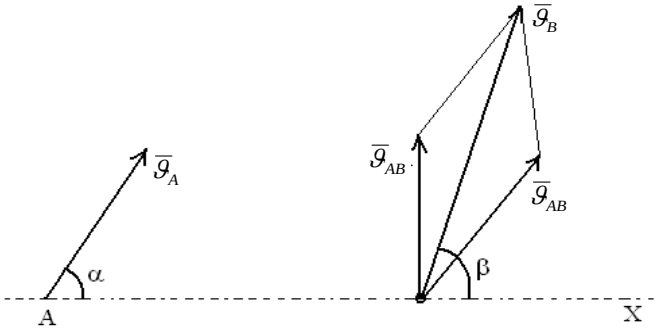
$$\bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{AB} \qquad (8.4)$$

Demak, *tekis shaklning biror nuqtasining tezligi, qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng ekan. iyatga ega bo'lgan quyidagi teoremani isbotlaymiz.*

Teorema: *Tekis shakl ikki nuqtasining tezliklarini shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalar o'zaro teng bo'ladi.*

Tekis shaklning $\bar{\vartheta}_A$ va $\bar{\vartheta}_B$ tezliklari berilgan bo'lsin (8.5-shakl). Shu tezliklarning A va B nuqtalarini tutashtiruvchi AX yo'nalishiga proyeksiyasining

tengligini ko’rsatsak, teoremani isbotlagan bo’lamiz. Buning uchun (8.4) ni AX yo’nalishiga proyeksiyalaymiz.



8.5-shakl

$$pr_{AX}(\overline{\vartheta}_B) = pr_{AX}(\overline{\vartheta}_A) + pr_{AX}(\overline{\vartheta}_{AB})$$

Bunda $\overline{\vartheta}_{BA} \perp AB$ bo’lgani uchun $pr_{AX}(\overline{\vartheta}_{AB}) = 0$.

Demak,

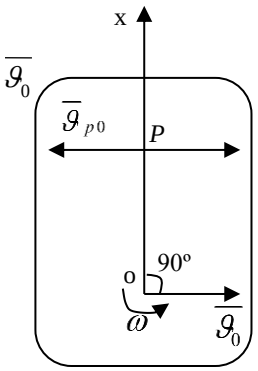
$$pr_{AX}(\overline{\vartheta}_B) = pr_{AX}(\overline{\vartheta}_A) \qquad (8.5)$$

$$\vartheta_A \cos\alpha = \vartheta_B \cos\beta$$

bo’ladi.

Teorema isbotlandi.

Tezliklar oniy markazi. Berilgan onda (daqiqada) tezligi nolga teng bo’lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklar oniy markazi deb ataladi. (8.6-shakl).



8.6-shakl

Bu chiziq ustida yotgan hamma nuqtalarning O nuqta atrofida aylanma tezligi o’tkazilgan chiziqqa tik, qutb nuqta ϑ_0 tezligiga teskari yo’naladi. Aylanma harakat tezliklari nuqtalardan aylanish markazi O gacha bo’lgan oraliqqa proporsional ekani bizga formuladan ma’lum. O’tkazilgan to’g’ri chiziq ustida shunday P nuqta topamizki, uning aylanish tezligi ϑ_{PO} miqdor jihatidan qutb nuqta tezligiga teng bo’lsin, ya’ni $\vartheta_0 = \vartheta_{PO}$ yo’nalishi unga qarama-qarshi bo’lsin $\overline{\vartheta}_0 = -\overline{\vartheta}_{P0}$. Bu holda P nuqtaning (absolyut) tezligi (8.4) formulaga muvofiq

$$\overline{\vartheta}_P = \overline{\vartheta}_O + \overline{\vartheta}_{PO}$$

bo’ladi. Shunday qilib shu onda P nuqta tekis shaklning tezliklar oniy markazi bo’ladi. Endi P nuqtaning to’g’ri chiziq ustidagi holatini aniqlaydigan formulaga muvofiq $\vartheta_{PO}=\omega OP$, ikkinchi tomondan $\vartheta_{PO}=\vartheta_0$ bu holda $\omega OP=\vartheta_0$ bo’ladi. Bundan

$$OP=\frac{\vartheta_0}{\omega} \qquad (8.6)$$

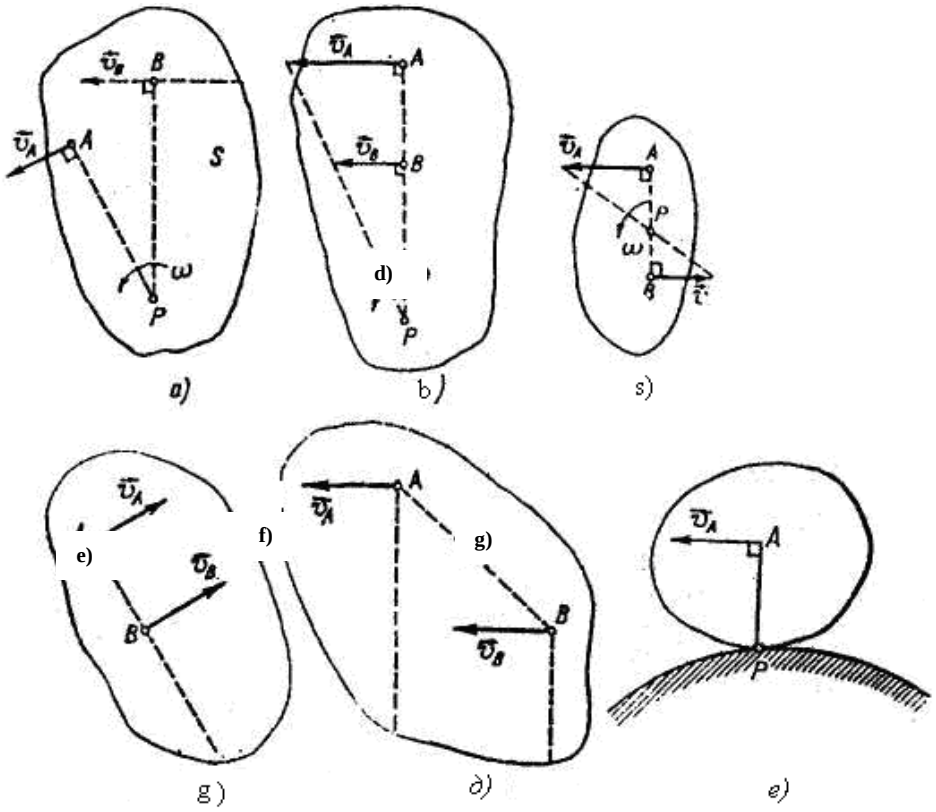
Demak, tekis shaklning tezliklar oniy markazi, qutb nuqtadan uning tezligiga aylanish yo’nalishda tik o’tgan to’g’ri chiziqda qutb nuqtasidan $\frac{\vartheta_0}{\omega}$ masofada joylashgan bo’lar ekan.

Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari. *Agar tekis shaklning biror A nuqtasining ϑ_A tezligi va ikkinchi B nuqtasining ϑ_B tezligining yo’nalishi berilgan bo’lsa, tezliklar oniy markazi shu A va B nuqtalardan tezliklarga o’tkazilgan tik chiziqlarni kesishgan nuqtasida bo’ladi* (8.7- shakl, *a*);

Agar tekis shaklni ikki A va B nuqtalarini $\overline{\vartheta}_A$, $\overline{\vartheta}_B$ tezliklari shu nuqtalarni tutashtiruvchi AB ga tik, miqdorlari farqli bo’lsa ($\vartheta_A\neq\vartheta_B$), tezliklar oniy markazi tezliklarning uchini tutashtiruvchi chiziq bilan AB chiziqni davomining kesishgan nuqtasida bo’ladi (8.7- shakl, *b, d*);

1)Agar tekis shaklning A va B nuqtalarining tezliklari teng va parallel bo’lsa, tezliklar oniy markazi (AP=∞) cheksizlikda bo’ladi. Shu onda tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qiladi (8.7- shakl, e,*f*).

2)Amaliyotda ko’pincha tekis shakl S qo’zg’almas egri chizig’i ustida sirpanmasdan dumalaydi. Bu holda S ning egri chiziqqa tegib turgan nuqtasining tezligi nolga teng bo’ladi. Shu nuqta mazkur on uchun oniy markaz bo’ladi (8.7- shakl, g).



8.7- shakl

Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash. Berilgan onda tekis shaklning oniy markazi P ma’lum bo’lsin. P ni qutb nuqta uchun olib, (8.4) formulaga muvofiq tekis shaklning A, B, C nuqtalari tezliklarini topamiz:

$$\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{PA}$$
$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{BP}$$
$$\overline{\vartheta}_C = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{CP}$$

Bu yerda $\vartheta_P=0$: bo’lgani uchun

$$\vartheta_A=\omega_p AP, \quad \vartheta_B=\omega_p BP, \quad \vartheta_C=\omega_p CP \qquad (8.7)$$

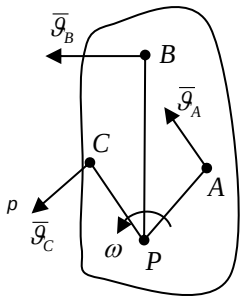
yo’nalishlari: $\overline{\vartheta}_A \perp AP$: $\overline{\vartheta}_B \perp BP$: $\overline{\vartheta}_C \perp CP$.

Agar tekis shaklning olingan onda oniy markazi ma’lum bo’lsa, tekis shakl nuqtalarining shu ondagi tezliklari, oniy markazi atrofida xuddi oniy aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari kabi topiladi.

Demak, tekis shaklning oniy markazi ma’lum bo’lganda, uning nuqtalari tezliklarining miqdorlari tekis shaklning aylanma harakat burchak tezligini nuqtalardan oniy markazgacha bo’lgan masofalariga ko’paytmasiga teng bo’ladi.

Tezliklar mos ravishda shu oraliqlarga aylanma harakat yo’nalishlarda tik yo’nalgan bo’ladilar (8.8-shakl). (8.7) dan tekis shakl nuqtalarining oniy paytdagi tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz

$$\frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{\vartheta_B}{BP} = \frac{\vartheta_C}{CP} \qquad (8.8)$$



8.8-shakl

TEKIS SHAKL NUQTASINING TEZLANISHINI QUTB USULIDA ANIQLASH.TEKIS SHAKL NUQTASINING TEZLANISHI.

$O_1\xi\eta$ qo'zg'almas tekislikda harakatlanayotgan S tekis shaklning biror ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishini aniqlaymiz. Bizga ma'lumki, S ning qo'zg'almas $O_1\xi\eta$ tekislikdagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi:

1) ixtiyoriy ravishda tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma;

2) qutb nuqta atrofida nisbiy aylanma harakatlardan iborat.

Shu sababli S tekis shakl har bir nuqtasining harakati ko'chirma va nisbiy harakatlardan tashkil topgan murakkab harakatdan iborat bo'lib, tezlanishi murakkab harakat tezlanishi kabi tezlanishlarni qo'shish teoremasiga muvofiq aniqlanadi.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$$

Bu tenglikdagi $\bar{a}_A$ – S tekis shakldan ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezlanishi. Bu tezlanish qattiq jismning ilgarilanma harakati xususiyatiga ko'ra tekis shaklning hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lib, S ning ko'chirma harakat tezlanishi bo'ladi, ya'ni $\bar{a}_e = \bar{a}_A$.

$\bar{a}_{BA}$ esa B nuqtaning O qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezlanishi, S ning nisbiy harakat tezlanishini ifodalaydi $\bar{a}_r = \bar{a}_{BA}$. Shunday qilib, tekis shaklning istalgan B nuqtasining tezlanishi $\bar{a}_B$ ixtiyoriy ravishda tanlab olingan A qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi $\bar{a}_A$ bilan qutb nuqta atrofida aylanma harakat $\bar{a}_{BA}$ tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng. Boshqacha aytilganda, tekis shaklning istalgan nuqtasining tezlanishi tekis shaklning ko'chirma va nisbiy tezlanishlariga qurilgan parallelogramm diagonali bo'ylab yo'nalgan bo'lib, miqdori shu diagonal uzunligiga teng. $\bar{a}_{OM}$ aylanma harakat tezlanishi bo'lgani uchun uni ikki tezlanishga ajratiladi:

1) B nuqtadan aylanish markazi A qutbga qarab BA bo'ylab yo'nalgan $\bar{a}^n_{BA}$– markazga intilma tezlanish;

2) Aylanish radiusi BA ga tik yo'nalgan $\bar{a}^\tau_{BA}$– aylanma tezlanishga ajraladi. Ya'ni

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}$$

Markazga intilma tezlanishning moduli

$$a^n_{BA} = \omega^2 BA$$

Hamma vaqt musbat son bo'lgani uchun a^n_{BA} hamma vaqt kuzatilayotgan nuqtadan aylanish radiusi bo'ylab aylanish markaziga yo'nalgan bo'ladi. Aylanma tezlanishning moduli

$$a^\tau_{BA} = |\varepsilon| BA$$

ga teng yo'nalishi aylanma harakat burchak tezlanishining ishorasiga bog'liq.

Agar $\varepsilon = d\omega/dt > 0$ bo'lsa, $\bar{a}^\tau_{BA}$ BA ga tik qutb nuqta atrofida aylanma harakat tezligi $\bar{\vartheta}_{BA}$ bilan bir yo'nalishda bo'lib, aylanma harakat tezlanuvchan bo'ladi. Agar

ε<0 bo’lsa, $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ BA ga tik, aylanma harakat tezligi $\bar{\vartheta}_{BA}$ ga teskari tomonga yo’nalgan bo’ladi. Bu holda aylanma harakat sekinlanuvchan bo’ladi. $\bar{a}^{n}_{BA}$bilan$\bar{a}^{\tau}_{BA}$ orasidagi burchak 90° bo’lgani uchun a^{n}_{BA}ning moduli

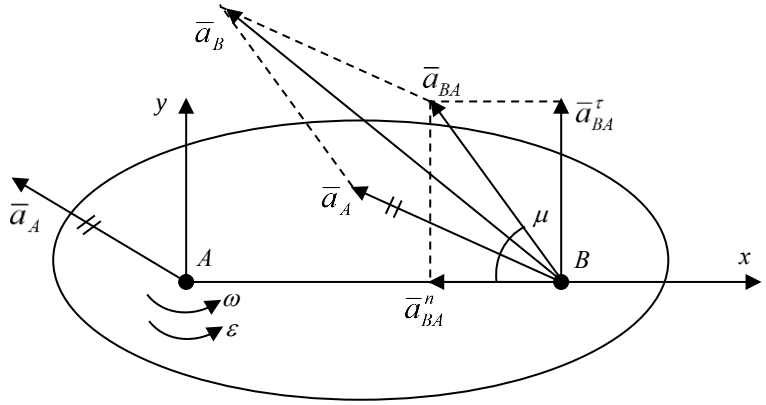
$$a_{BA}=\sqrt{\left(a^{n}_{BA}\right)^2+\left(a^{\tau}_{BA}\right)^2}=AB\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

tenglikdan topiladi.

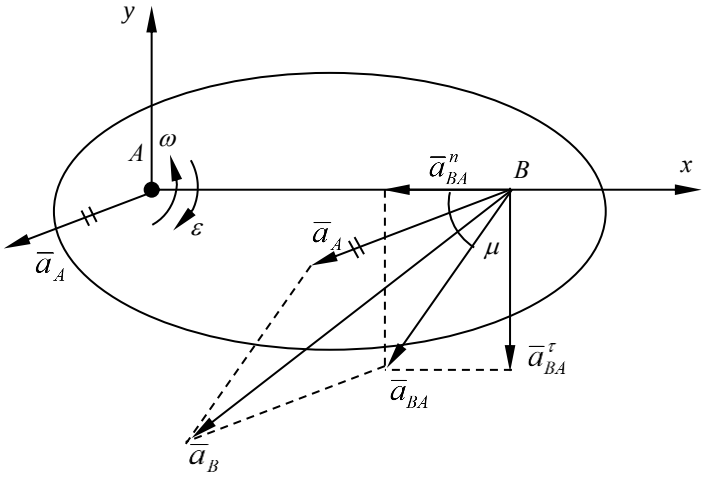
Agar aylanish radiusi AB bilan a_{BA}ni tashkil etgan burchagini μ bilan belgilasak, quyidagi tenglikni olamiz

$$tg\mu=\frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{a^{n}_{BA}}=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Bundan ω va ε aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi tekis shaklining hamma nuqtalari uchun bir xilda bo’lganligi sababli μ burchak har onda tekis shaklning hamma nuqtalari tezlanishlari uchun bir xilda bo’ladi. Agar ε=0 bo’lsa, $\bar{a}^{\tau}_{BA}=0$ bo’lib, $\bar{a}_{BA}=\bar{a}^{n}_{BA}$. Bu holda aylanma harakatdagi tezlanish markazga intilma tezlanishdan iborat bo’lib, aylanma harakat tekis o’zgaruvchan aylanma harakat bo’ladi. (8.9) ga ko’ra (8.8) ni quyidagicha yozish mumkin



8.9-a shakl



8.9-b shakl

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}$$

Shunday qilib, agar ixtiyoriy tanlab olingan A qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi va qutb nuqta atrofida aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi berilgan bo'lsa, tekis shaklning istalgan B nuqtasining tezlanishi yuqoridagi formula asosida topiladi.

Tezlanishlar oniy markazi. *Tekis shaklning har onda tezliklar oniy markazi bo'lgani kabi, tezlanishlar oniy markazi ham bo'ladi.* Harakatlanayotgan tekis shaklning kuzatilayotgan onda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini Q bilan belgilaymiz va uning holatini aniqlaymiz. Q nuqtaning tezlanishi S tekis shaklning boshqa nuqtalarining tezlanishi kabi formulaga muvofiq aniqlanadi.

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_0 + \bar{a}_{Q0}$$

bo'ladi.

Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun $a_Q = 0$ bo'lishi kerak. Bundan $a_0 = a_{Q0}$ kelib chiqadi. Demak, Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun Q ning ko'chirma harakat a_0 tezlanishi oniy aylanma harakat a_{Q0} tezlanishiga miqdor jihatidan teng bo'lib, bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lishi kerak.

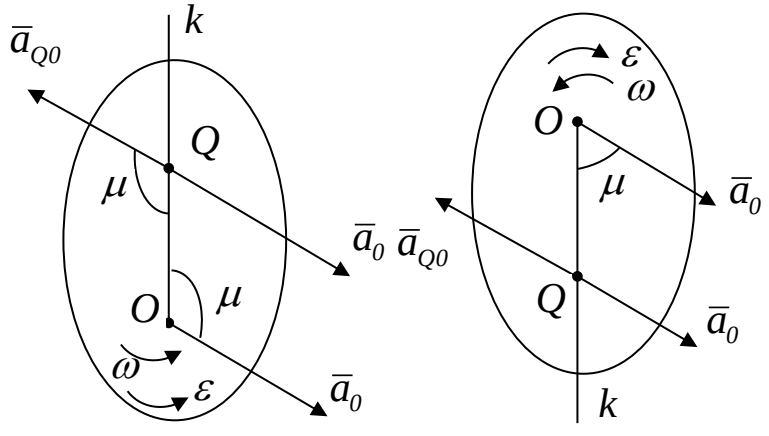
$$\left|a_{Q0}\right| = Q0\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

shartga ko'ra $a_0 = \left|a_{Q0}\right|$ bo'lganidan

$$Q0 = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

ni topamiz. Bu tenglik tezlanishlar oniy markazi Q ning 0 nuqtagacha bo'lgan masofasini aniqlaydi. Oniy aylanish radiusi QO ning a_{Q0} bilan tashkil etgan burchagi formulaga muvofiq

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$



8.10-shakl

tekis shaklning boshqa A va B nuqtalarining tezlanishlarini formulaga muvofiq topamiz

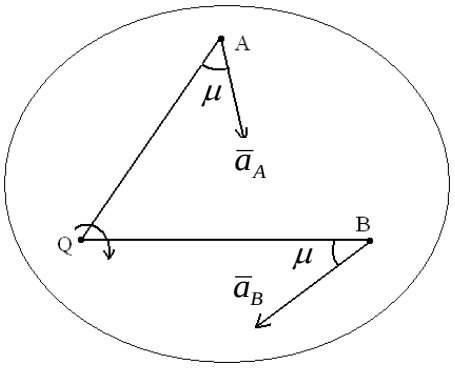
$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ}$$
$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ}$$

Bu yerda Q tezlanishlar oniy markazi bo'lgani uchun $\bar{a}_Q$ =0 bo'lib, yuqoridagi tengliklar quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ}$$
$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BQ}$$

bu tezlanishlarning moduli

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$
$$a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



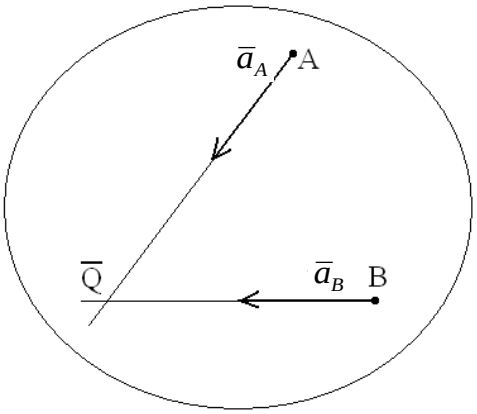
8.11-shakl

tengliklaridan aniqlanadi. Formulalardan S tekis shaklning tegishli nuqtalarining tezlanishlari nuqtalardan tezlanishlar oniy markazi bo'lgan oraliqlarga proporsional ekani kelib chiqadi

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}$$

olingan formulalarga asosan quyidagi natijaga kelish mumkin. (8.12-shakl).

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi bir nuqtada bo'lmaydi.



8.12-shakl

Nazorat savollari

1. Qattiq jismning tekis parallek harakatiga ta’rif bering.
2. Tekis parallek harakat qonuni yozing.
3. Tekis parallek harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari qanday aniqlanadi?
4. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori qanday topiladi?
5. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Tezliklar oniy markaziga ta’rif bering.
7. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullarini ko`rsating.
8. Tezliklar oniy markazi tushunchasidan foydalanib jism ixtiyoriy nuqtasi tezligi qanday topiladi?
9. Tekis harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarini proyeksiyasi haqidagi teoremani ta’riflang.
10. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik miqdori qanday aniqlanadi?
11. Tekis harakatdagi jism nuqtasi tezlanish miqdori qanday topiladi?

9- MA`RUZA

MAVZU: MODDIY NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

Ma`ruza rejasi:

1. Moddiy nuqtaning nisbiy, ko`chirma va murakkab (absolyut) harakati
2. Murakkab (absolyut) harakatdagi moddiy nuqta tezligi, tezliklarni qo`shish teoremasi
3. Murakkab (absolyut) harakatdagi moddiy nuqta tezlanishi, tezlanishlarni qo`shish teoremasi. (Koriolis teoremasi)
4. Koriolis tezlanishining kattaligi va yo`nalishi
5. Koriolis tezlanishini paydo bo`lish sabablari

**Tayanch so`zlar va iboralar:** *Qo`zg`almas sanoq sistemasi, qo`zg`aluvchi sanoq sistemasi , absolyut harakat, nisbiy harakat, ko`chirma harakat, absolyut tezlik, nisbiy tezlik, ko`chirma tezlik, absolyut tezlanish, nisbiy tezlanish, ko`chirma tezlanish, koriolis tezlanish, koriolis tezlanishni moduli, Koriolis tezlanish vektorining yo`nalishi*

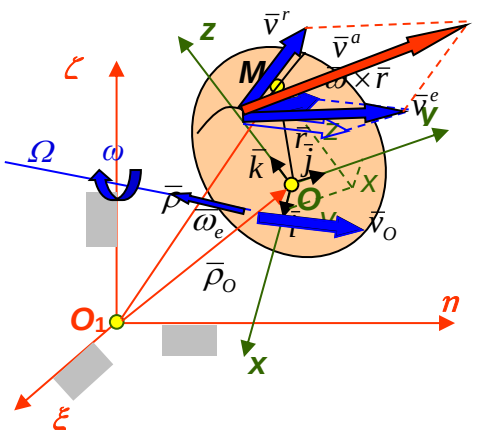
Nuqtaning bir vaqtning o`zida ikkita yoki bir nechta harakatlarda ishtirok etishiga moddiy ***nuqtaning murakkab harakati*** *deyiladi***.**

Moddiy nuqta (jism)ning murakkab harakatiga misollar: daryoda suzayotgan qayiq, harakatlanayotgan eskalatorda yurayotgan kishi, harakatdagi kulisaning toshi, tebranayotgan silindrdagi porshen harakati, Uatt markazga intilma regulyatoridagi shar harakati.

Nuqtaning murakkab harakatini yozish yoki murakkabligicha ikki sanoq sistemasi ishlatiladi:

$O_1\zeta\eta\xi$ qo`zg`almas sanoq sistemasi, u qanqaydir shartli qo`zg`almas jism bilan bog`lahgan, masalan Er bilan**.**

Oxyz qo`zg`aluvchi sanoq sistemasi, u qanqaydir qo`zg`aluvchi jism bilan bog`lahgan



Absolyut (murakkab) harakat (a) – M nuqtaning $O_1\zeta\eta\xi$ qo`zg`almas koordinata sistemasiga nisbatan harakani.

Nisbiy harakat (r)- M nuqtaning Oxyz qo`zg`aluvchi koordinata sistemasiga nisbatan harakani.

Ko`chirma harakat (*e*) – *Oxyz* qo`zg`aluvchi** koordinata sistemasining $O_1\zeta\eta\xi$ qo`zg`almas **koordinana sistemasiga nisbatan harakani

Absolyut tezlik v^a (tezlanishi a^a) – *M nuqtaning $O_1\zeta\eta\xi$ qo`zg`almas koordniana sistemasiga nisbatan hisoblangan tezligi(tezlanishi).*

Nisbiy tezlikv^r (tezlanishi a^r)– *M nuqtaning Oxyz qo`zg`aluvchi koordinata sistemasiga nisbatan hisoblangan tezligi (tezlanishi).*

Ko`chirma tezlik $v^e$ (tezlanish $a^e$)** – *Harakat kuzatilayotgan paytda M nuqta qo`zg`aluvchi Oxyz koordinatalar sistemasiga biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan deb qarab, shu nuqtaning tezligiga (tezlanishiga) aytiladi*. *Bunda **Ko`chirma tezlig v^e (tezlanish a^e) qo`zg`almas koordinatalar sistemasiga nisbatan hisoblanadi.*

Masalan, harakatdagi suv kemasining palubasi ustida dumalayotgan sharning harakatini olaylik. Sharning palubaga nisbatan harakati nisbiy harakat deb ataladi, tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi esa nisbiy tezlanish deb ataladi; suv kemasining qurg`oqqa nisbatan harakati shar uchun ko`chirma hatakat hisoblanadi va palubaning shar egallagan joydagi tezligi ko`chirma tezlik, tezlanishi esa ko`chirma tezlanish hisoblanadi; va nihoyat sharning qirg`oqqa nisbatan harakati absolyut harakat deb atakadi, tezligi absolyuttezlik, tezlanishi esa absolyuttezlanish deyiladi.

Tezliklarni qo`shish haqidagi teorema

Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezligi nisbiy va ko`chirma tezliklarning yig`indisiga teng bo`ladi.

Ixtiyoriy vaqt uchun quyidagi munosabat o`rinli bo`ladi:]

$$\boxed{\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.} \qquad (9.1)$$

Umumiy holda qo`zg`aluvchan koordinatalar sistemasi bilan bog`langan jismning erkin harakatida ***i***, ***j***, ***k***ortlar (birlik vtctorlar) o`z yo`nalishlarini o`zgartirishini hisobga olib, bu ifodani vaqt buyica bir marta differensiyalaymiz:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \boxed{\frac{d\bar{\rho}_O}{dt}} + \boxed{\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}} + \boxed{x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}}. \qquad (9.2)$$

(8.2) ifodaning birinchi va ohirgi hadlarining yig`indisi erkin jism nuqtasining tezligini, ya`ni **nuqtaning kochirma tezligini(v^e)** beradi:

$$\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Bunda(v^o) - *O*qutb tezligi; keyingi uch had– **nuqtaning nisbiy tezligi(v^r).**

Ohirgiuchhaduchun***i***, ***j***, ***k***: ortlarning hosilasini aniqlash kerak bo`ladi

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{i}); \qquad \frac{d\bar{j}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{j}); \qquad \frac{d\bar{k}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{k}).$$

Ohirgiuchtaifodanivektor ifoda shaklida quyidagicha yozfmiz:

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) =$$
$$= \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Shunday qilib ρ radius-vektorning birinchi tartibli hosilasi nuqtaning absolyut tezligi ekanligini e`tiborga olsak quyidagiga ega bo`lamiz:

(8.3) $$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.$$

Absolyut tezlik vektorining moduli

(8.4) $$\left|\bar{v}^a\right| = \sqrt{\left|\bar{v}^r\right|^2 + \left|\bar{v}^e\right|^2 + 2\left|\bar{v}^r\right|\left|\bar{v}^e\right|\sin(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.$$

Tezlanishlarni qo`shish teoremasi (Koriolis teoremasi)

Teorema. Nuqtaning absolyut tezlanishi - *Nuqtaning absolyut tezlanishi nisbiy, ko`chirma va kariolis tezlanishlarning geometrik yig`indisiga teng bo`ladi.*

Yuqorida tezlik uchun quyidagi munosabat olingan edi:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}=\frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2}+\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k}+\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}+\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}+x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

$\bar{a}_O$ $\bar{a}^r$ $\bar{a}^c$

Bu munosabat ya`na bir vaqt bo`yicha differensiallaymiz:

Bu erda($\boldsymbol{a_o}$) – *O* qutbning tezlanishi; keyingi uch had-**nuqtaning nisbiy tezlanishi($\boldsymbol{a^r}$).** Ohirgi uchhad uchun ***i***, ***j***, ***k***: ortlarning ikkinchi tartibli hosilasini aniqlash kerak bo`ladi

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{i})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{i});$$
$$\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{j})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{j});$$
$$\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{k})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{k}).$$

Bu ifodani ohirgi uchhadga quyamiz va guruhlarga ajratamiz

$$\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times x\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times x\bar{i})+\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times y\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times y\bar{j})+$$
$$+\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times z\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times z\bar{k})=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{r}).$$

Birinch va olingan ikki hadlar yig`indisi erkin jism nuqtasining tezlanishi bo`lib u **nuqtaning ko`chirma tezlanishi ($\boldsymbol{a^e}$) bo`ladi**:

$$\bar{a}^e=\bar{a}_O+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{r}).$$

Qolgan oltita qo`shiluvchini birxil hadliklarin iyig`ib, ortlarningvaqt buyicha birinchihosilasining vektor ko`paytmasiga qo`yamiz va guruhlaymiz:

$$2\left[\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt}+\dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}+\dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right]=2\left[\dot{x}(\bar{\omega}_e\times\bar{i})+\dot{y}(\bar{\omega}_e\times\bar{j})+\dot{z}(\bar{\omega}_e\times\bar{k})\right]=2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}^r).$$

Tezlanishning olingan bu tashkil etuvchsi *Kariolis tezlanish(a^c)ni tasvirlaydi:*

Koriolis tezlanishi ko`chirma harakat burchak tezlik vektorining nisbiy harakat tezlik vektoriga vektorli ko`paytmaning ikkilanganligiga teng

$$\bar{a}^c=2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}^r).$$

Shunday qilib, ρ radius–vektorni vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosilasi absolyut tezlanish ekanligini e`tbor qaratsak, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\bar{a}^a = \bar{a}^r + \bar{a}^e + \bar{a}^c.$$

Koriolis tezlanishning kattaligi va yo`nalishi

Koriolis tezlanishni moduli:

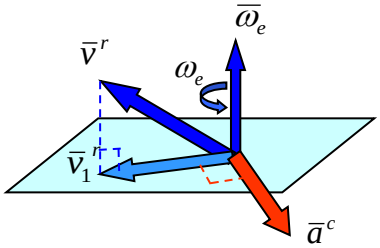
$$\left|\bar{a}^c\right| = 2\omega_e v^r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}^r).$$

Koriolis tezlanishi ikki holda nulga aylanadi:

1. Agar ko`chirma harakat burchak tezligi nolga teng bo`lsa (ilgarilama ko`chirma harakat).
2. Agar burchak tezlik vectori nisbiy tezlikn vektoriga parallel bo`lsa (vektorlar orasidagi burchak sinusi nolga aylanadi).

Koriolis tezlanish vektori yo`nalishi

Koriolis tezlanishi vektori $\bar{\omega}_e$ *va* $\bar{v}^r$ vektorning yo`nalishi bilan bir-xil bo`lib, $\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r$ vektorlar joylashgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo`nalgan va uning uchidan qaraganimizda $\bar{\omega}_e$ - vektorni soat millariga teskari tomonga 180° dan kichik burchakka $\boldsymbol{v^r}$ vektorning ustiga tushishi kerak.



Koriolis tezlanishi vektori yo`nalishi quyidagi uch qoidaning biri bilan aniqlanadi:

1. Vektor ko`paytmaning aniqlanishi bo`yicha
2. O`ngqo`lqoidasibo`yicha
3. **Jukovskiy** qoidasi bo`yicha:

a) Nisbiy tezlik v vektorini ko`chirma harakat burchak tezligi yo`nalishiga perpendikulyar tekislikka.

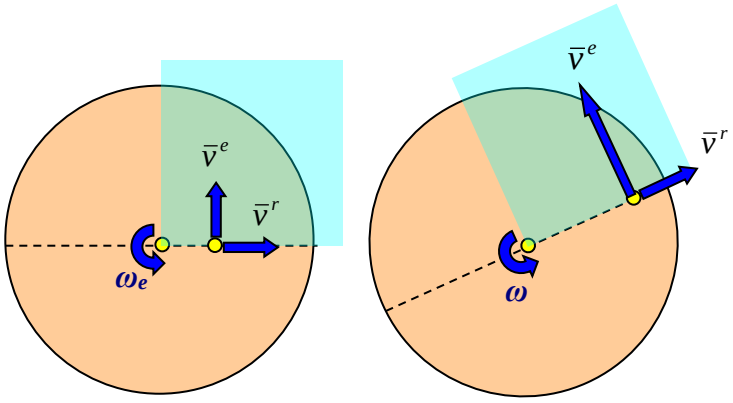
б) Bu proyeksiyani mazkur tekislikda ko`chirma harakat aylanish yo`nalishida 90°ga buramiz. Bu yo`nalish Koriolis tezlanishining yo`nalishi bo`ladi.

Koriolis tezlanishini vujudga kelish sabablari

Yuqorida keltirilgan Koriolis tezlanishi tarkibida nisbiy tezliklarni proeksiyalari va harakatdagi koordinat sistemasi ortlaridan vaqt bo`yich hosilasi mavjud bo`lgan qo`shiluvchi ko`paytmalarni guruhlash natijasida chiqarilgan va bunday ko`paytmalar ikkitadan ekanligi chiqarilgan edi.

Koriolis tezlanishini namoyon bo`lishining fizik mohiyatini aniqlash maqsadida bu jarayonni sifat tomonini ko`rsatuvchi misol keltiramiz. Bu misolda atayin nisbiy tezlik vektori (qo`zg`aluvchi koordinatalar sistemasida) va ko`chirma burchak tezligi vektori (qo`zg`aluvchi koordinatalar sistemasini qo`zg`almas o`qlar atrofida u aylanishi) atayin o`zgarmas deb olamiz:

Vaqtning qaysidir bir onida nuqta holati, nisbiy va ko`chirma tezlik vektorlari rasmda (yuqoridan ko`rinishi) ko`rsatilganidek berilgan bo`lsin:



Ma`lum bir vaqt o`tgandan keyin nuqta aylanish o`qifan uzoqlashadi va lpsm ma`lum burchakka buriladi.

Natijada:

1) Ko`chirma burchak tezlik

Mavjudligi sababli **Nisbiy tezlik o`z yo`nalishini o`zdgartiradi va**

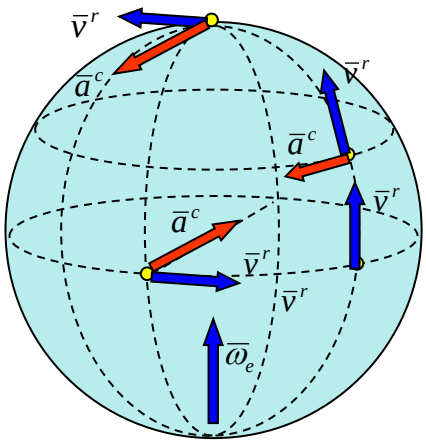
2) Nuqta bilan aylanish o`qi orasidagi o`zgartiruvchi nisbiy tezlikni mavjudligi sababli **ko`chirma chiziqli tezlik o`zini kattaligini o`zgartiradi.**

Shunday qilib, Koriolis tezlanishini vujudga kelishiga quyidagi ikkita sabab bo`lishi mumkin deb hisoblasak bo`ladi:

1) ko`chirma burchak tezlik nisbiy tezlikka ta`sir etadi,

2) nisbiy tezlik ham o`z navbatida ko`chirma chiziqli tezlirra ta`sir etadi. BuesaKoriolis tezlanishini aniqlovchi formulada ikkiga teng koeffisiyent orqali namayon bo`lishi mumkin.ya`ni: $\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$

O`z o`qiga nisbatan aylanuvchi Yer sirtida harakatlanuvchi nuqtaning har xil holatlarda ko`rinishi *Koriolis tezlanishi yo`nalishini aniqlashga yaqqol misol bo`la oladi:*



Nazorat savollari

1. Moddiy nuqtaning qanday harakati nisbiy harakat deyiladi?
2. Moddiy nuqtaning qanday harakati ko`chirma harakat deyiladi?
3. Moddiy nuqtaning murakkab harakat qonunini yozing.
4. Moddiy nuqtaning absolyut tezligi qanday aniqlanadi?
5. Moddiy nuqtaning absolyut tezlanishi qanday aniqlanadi?
6. Koriolis (qo`shimcha) tezlanish nima?
7. Nuqtaning nisbiy va ko`chirma tezlanishi nima?
8. Tezliklarni qo`shish teoremasini ta’riflang.
9. Tezlanishlarni qo`shish teoremasini ta’riflang.
10. Moddiy nuqtaning ko`chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo`lganda absolyut tezlanishi qanday topiladi?
11. Qanday holda Koriolis tezlanish nolga teng bo`ladi?
12. Koriolis tezlanish yo`nalishi qanday aniqlanadi?

10 – MA`RUZA

MAVZU: DINAMIKA. DINAMIKAGA KIRISH. DINAMIKANING ASOSIY QONUNLARI

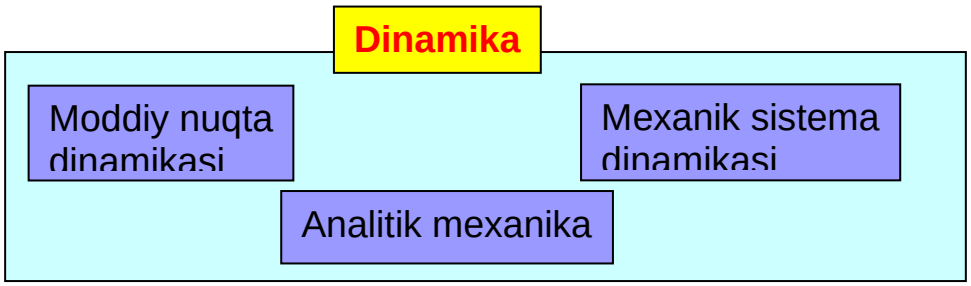
Ma`ruza rejasi:

1. Dinamikaning asosiy tushunchalari
2. Dinamika qonunlari
3. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasi
4. Moddiy nuqta dinamikasiining ikki asosiy masalasi

Tayanch so`zlar va iboralar:

Dinamika, Nuqta dinamikasi, Mexanik sistema dinamikasi, Analitik mexanika, Inersiya kuchi, Dinamika – Nazariy mexanikaning kuchlar ta'sirida bo'lgan jismlarning harakatini o'rganuvchi qismi hisoblanadi.

Bu qism uch bo'limdan iborat:



Nuqta dinamikasi – *Moddiy nuqta harakatini, uni vujudga keltirubchi kuchni hisobga olib o'rganadi.*

O'rganish sohasi -moddiy nuqta – massaga ega bo'lgan lekin o'lchamlari e'tiborga olinmaydigan moddiy jism.

Mexanik sistema dinamikasi – *harakati tekshrilayotgan moddiy nuqtalar yoki jismlar sistemasini uni harakatga keltiruvchi kuchlarni hisobga olib o'rganadi.*

Analitik mexanika – *erkin bo'lmagan mexanik sistemalarni harakatini umumiy analitik usullarni qo'llab o'rganadi*.

Asosiy cheklanish shartlari:

- mutlaq fazo mavjudlagi (geometrik xususiyatga ega bo'lib, materiya va uning harakatiga bog'liq emasligi).

Bundan quyidagilar kelib chiqadi:

- mutlaq qo'zg'almas sanoq sistemasining mavjud bo'lishi.
- vaqtning hisob sistemasining harakatiga bog'liq bo'lmasligi.

– harakatdagi nuqtai massasining hisob sistemasi harakatiga bog'liqmasligii.

Bu ruxsat etilganlar Galiley va Nyutonlar tomonidan yaratilgan klassik mexanikada ishlatiladi. U shu kungacha juda keng ishlatilish sohasiga ega.

Dinamikaning asosiy qonunlari – *Galiley tomonidan kashf va Nyuton tomonidan bayon qilingan bo'lib, u mexanik sistema harakatini ifodalashni hamma usullarini yozish, taxlil qilishni va ularni har hil kuchlar bilan dinamik ta'sirlashuvini asosini tashkil etadi.*

Inersiya qonuni (Galiley va Nyuton qonuni) – *Tashqi muhit ta'siridan muxofazalangan moddiy nuqtaga quyilgan kuchlar uning holatini yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatini davom ettiradi.* Bundan harakat va muvozanat holatlar inersiya bo'yicha ekvivalent ekanligi kelib chiqadi (Galilleyning nisbiylik qonuni). Inersiya qonuni o'rinli bo'lgan hisob sistemasi inersiyal xisob sistemasi deb deb ataladi. Moddiy nuqta o'zining harakat tezligi (kinematik holati) ni o'zgarishsiz saqlashga intilish xususiyati uning uning inertligi deyiladi.

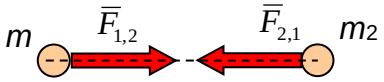
Kuch va tezlanishning proporsionallik qonuni (Nyutonning II qonuni-dinamikaning asosiy tenglamasi) – *Moddiy nuqtaning kuch ta'sirida olgan tezlanishi, kuchga to'g'ri proporsional va uning massasiga teskari proporsional*

$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}.}$ yoki $\boxed{\bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F}}$

Bu erda ***m*** – nuqta massasi (inertlik o'lchovi), kg da o'lchanadi, miqdor jihatdan og'irlikni erkin tushish tezlanishiga bo'linganiga tehg.

F – ta'sir etuvchi kuch, H larda o'lchanadi (1 H shunday kuchki, uning ta'sirida 1 kg massali jism 1 m/c 2 tezlanish oladi, 1 H = 1/9.81 kg-c).

Ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuni (Nyutonning III-qonuni) – *Ikkita moddiy nuqtaning bir-birlariga ta'sir kuchlari, shu nuqtalarni birlashtiruvchi chiziqda joylashib, modullarni teng, lekin yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi:*



$\boxed{\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}}$

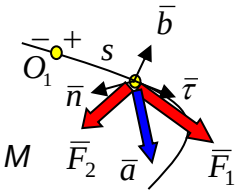
Kuchlar ta’sirining o’zaro mustaqillik qonuni – *Agar moddiy nuqtaga bir nechta kuch ta’sir etsa, nuqtaning tezlanishi har bir kuchning alohida ta’siridan nuqta oladigan tezlanishlarning geometric yig’ndisiga teng boladi:*

$\bar{a}(\bar{F}_1,\bar{F}_2,...)=\bar{a}_1(\bar{F}_1)+\bar{a}_2(\bar{F}_2)+....$ yoki $\bar{a}(\bar{R})=\bar{a}_1(\bar{F}_1)+\bar{a}_2(\bar{F}_2)+....$

Dinamikaning asosiy tenglamasi:- $m\bar{a}=\sum\bar{F}_i.$ nuqta harakatini **vektor usulda** berilishiga mos keladi.

Moddiy nuqta harakatining differensiyal tenglamalari

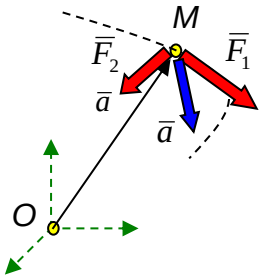
Dinamikaning asosiy tenglamasiga tezlanishni ifodasini qo’ysak:



$$\bar{a}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\sum\bar{F}_i \quad (1).$$

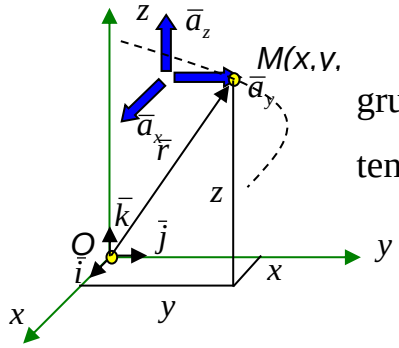
- Nuqta harakatining vektor formadagi differensiyal tenglamasi hosil bo’ladi.



Koordinatalar usulida: *Radius-vektorni koordinatalar bilan bog’liqligidan va kuch vektorini uni proeksiyalari orqali ifodasidan foydalanamiz:*

$\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$ $\quad F_i=X_i\bar{i}+Y_i\bar{j}+Z_i\bar{k}$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})=\sum(X_i\bar{i}+Y_i\bar{j}+Z_i\bar{k}).$$



gruppalashdan keyin Vektor ifoda uchta skalyar tenglamaga ajraladi**:**

$$(x): m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X_i;$$

$$(y): m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y_i;$$ yoki

$$(z): m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z_i.$$

$$m\ddot{x}=\sum X_i;$$
$$m\ddot{y}=\sum Y_i;$$
$$m\ddot{z}=\sum Z_i.$$

- nuqta harakatining koordinatalar usulidagi differensiyal tenglamasi.

Bu natija (1) vektor differensiyal tenglamani dekart koordinata o’qlariga proeksiyalash bilan ham olinishi mumkin.

Moddiy nuqta harakatining tabiiy o'qlaridagi tenglamasi *– vektor ko'rinishdagi differensiyal tenglamasini tabiiy (harakatdagi) koordinata o'qlariga proeksiyalash bilan olinadi***:**

$$(\tau): ma_{\tau\tau} = \sum F_{i\tau};$$
$$(n): ma_n = \sum F_{in};$$
$$(b): m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

yoki

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau};$$
$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{in}.$$

*- Moddiy nuqtaning uchyoqli tabiiy o'qlardagi harakat tenglamasi***.**

Dinamikaning ikki asosiy masalasi:

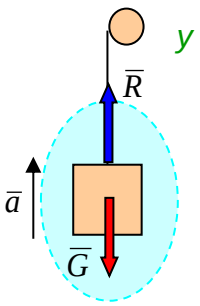
1. Birinchi masalasi: *Harakat berilgan (harakat tenglamasi, traektoriya). Shu harakatni sodir qiluvchi kuch topiladi*.

2. Dinamikaning ikkinchi yoki asosiy masalasi: *Harakatni sodir qiluvchi kuch berilgan. Harakat parametrlari (harakat tenglamasi va traektoriyasi) aniqlanishi kerak.*

Bu ikki masala ham ***Dinamikaning asosiy tenglamalari*** *yoki ularni koordinata o'qlardagi proeksiyalari yordamida yechiladi.* Agar moddiy nuqta erkin bo'lmasa, huddi statikadagi kabi ularga bog'lanishdan ozod qilish prinsipi qo'llaniladi. Natijada reaksiya kuchlari ham moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlar safiga qo'shiladi. ***Dinamikaning birinchi masalasi*** *differensiyallash yo'li bilan yechiladi*. ***Dinamikaning ikkinchi masalasining yechimi*** *mos differensiyal tenglamalarni integrallash yo'li bilan amalgam oshiriladi* va bu yo'l differensiyallashga nisbatan murakkabroq hisoblanadi. Demak dinamikaning ikkinchi masalasi yechimi birinchi masala yechimiga nisbatan murakkab kechadi.

Dinamikaning birinchi masalasini yechish – misollarda ko'ramiz:

1–masala. G og'rlikdagi lift kabinasi tros yordamida ***a*** tezlanish bilan ko'tarilmoqda. Tros tarangligi aniqlansin.



1. Sohani aniqlaymiz (lift kabinasi ilgarilama harakatda bo'lganligi uchun, uni moddiy nuqta deb qaraymiz).

2. Bog'lanish (tros) ni tashlab uni *R*. Reaksiya kuchi bilan almashtiramiz.

3. Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzib olamiz: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}.$

4. Dinamikaning asosiy tenglamasini ***y*** o'qiga proeksiyalaymiz:

$$(y): \; ma_y = R - G.$$

Trosni reaksiya kuchini aniqlaymiz: $$R = G + ma_y = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

Trosni tarangligini aniqlaymiz: $\bar{T} = -\bar{R}; \;\; T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$

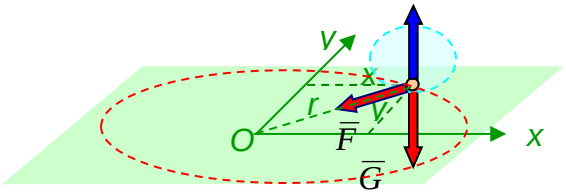
Kabinani tekis harakatdaligi uchun *ay*= 0 va tros tarangligi uning og'irligiga teng:

T = *G*.

Trosuzilsa*T* = 0bo'ladi va kabinani tezlanishi erkintushish tezlanishiga tengbo'ladi:

ay = -*g*.

2–masala. *m* massali nuqta gorizontal tekislik (Oxy tekislik) da *x*=*a*·cos*kt*, *y*= *b*·cos*kt* qonun bilan harakatlanmoqda. Nuqtaning shu harakatini vujudga keltiruvchi kuchni aniqlang.



Kuchni proeksiyalarini aniqlaymiz:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$$
$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$$

Kuchning moduli: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$

Yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\bar{F}, x.) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \qquad \cos(\bar{F}, y.) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Shunday qilib, kuch miqdori nuqtadan markaz koordinatalarigacha bo'lgan masofaga proporsional va nuqtani markaz bilan birlashtiruvchi chiziq bo'ylab markazga qarab yo'nalgan.

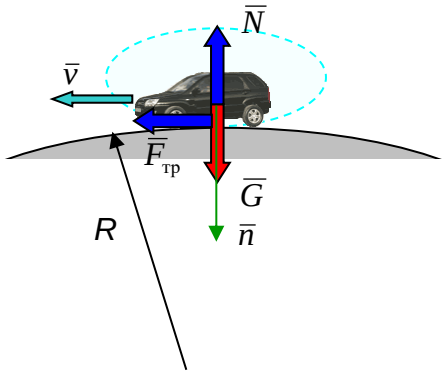
Nuqtaning harakat traektoriyasi markazi koordinat boshida joylashgan ellipsdan iborat:

$$x^2 = a^2 \cos^2 kt;$$
$$y^2 = b^2 \sin^2 kt.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

4-masala: Og'irligi G bo'lgan avtomobil egrilik radiusi R bo'lgan ko'prik bo'ylab V tezlik bilan harakatlanmoqda. Avtomobilning ko'prikka beradigan bosimi aniqlansin

.



1. Sohani aniqlaymiz (avtomobil, o'lchamlarini hisobga olmaymiz va moddiy nuqta deb qaraymiz).

2. Bog'lanish gadir-budir tekislik) ni tashlab uni N reaksiya va ***F*** ishqalanish kuchi bilan almashtiramiz.

3. Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzib olamiz: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}.$

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}.$$

4. Dinamikaning asosiy tenglamasini *n* o'qiga proeksiyalaymiz: $(n):\ ma_n = G - N.$

Bundan normal reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$N = G - ma_n = G - m\frac{v^2}{R} = G(1 - \frac{v^2}{gR}).$$

Avtomobilning ko'prikka beradigan bosim kuchini aniqlaymiz:

$$\bar{Q} = -\bar{N};\quad Q = G(1 - \frac{v^2}{gR}).$$

Bundan, avtomobil bosimining ko'prikka beradigan bosimi nol ($Q = 0$) qiymatga to'g'ri keladigan avtomobil tezligini aniqlaymiz: $v = \sqrt{gR}.$

Nazorat savollari

1. I.Nyutonning birinchi qonunini ayting.
2. I. Nyutonning ikkinchi qonunini ayting.
3. I.Nyutonning uchunchi qonunini ayting.
4. Nuqta dinamikasining birinchi masalasini izohlang.
5. Nuqta dinamikasining ikkinchi masalasini ayting. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasi nicha xil usulda beriladi?
6. Bog`lanishdagi moddiy nuqta uchun dinamika asosiy tenglamasini yozing.

11– MA`RUZA

MAVZU: MODDIY NUQTA DINAMIKASI. DINAMIKANING BIRINCHI VA IKKINCHI ASOSIY MASALALARI

Ma`ruza rejasi:

1. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi.
2. Dinamikaning teskari masalasini yechish
3. Dinamikaning to'g'ri va teskari masalalarini yechish uchun umumiy ko'rsatmalar. Yechish tartibi.
4. Teskari masalani yechishga oid mashqlar.

Tayanch so`zlar va iboralar:

Dinamika, Dinamikaning birinchi va ikkinchi masalalari, ikkinchi tartibli differensial tenglama, integral doimiylari, tezlik proeksiyasi, o`zgaruvchilarga ajratish.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini yechish-Nuqta harakatining umumiy holida unga ta'sir etuvchi kuch vaqt, koordinata va tezlik ka bog'liq holda o'zgaruvchan bo'ladi. Nuqta harakat iikkinchi tartibli uchta differencial tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(t, C_1, C_2, C_3);\\ \dot{y} &= f_2(t, C_1, C_2, C_3);\\ \dot{z} &= f_3(t, C_1, C_2, C_3).\end{aligned}$$

Tenglamalarni integrallagandan keyin oltita

$C_1, C_2, \ldots, C_6$integral doymiylari hosil bo'ladi.

$C_1, C_2, \ldots, C_6$integral doymiylarining qiymati oltita t=0 boshlang'ich shartdan topiladi:

$$\begin{aligned}x &= f_4(t, C_1, C_2, ..., C_6);\\ y &= f_5(t, C_1, C_2, ..., C_6);\\ z &= f_6(t, C_1, C_2, ..., C_6).\end{aligned}$$

Topilgan o'zgarmaslarni o'z o'rniga qo'ygandan keyin:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\\ \dot{y} &= f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\\ \dot{z} &= f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0);\\ y &= f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0);\\ z &= f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Shunday qilib, bir xil kuchlar sistemasi ta'sirida moddiy nuqta, boshlang'ich shartlarni turli tumfnligiga qarab turli ko'rinishdagi harakatlar sinfini hosil qilish mumkin.

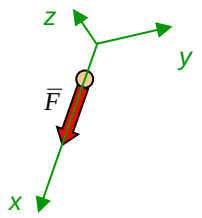
Nuqtaning boshlang'ich holati uning boshlang'ich koordinatalari orqali hisobga olinadi. Proeksiyasi orqali berilgan boshlang'ich tezlik, nuqtani biror soha (uchastka)da qanaqa harakatlanishi, uni shu uchastkaga kelguncha unga ta'sir

etuvchi kuchlarning ta’siri natigasini o’zida aks ettiradi, ya’ni nuqtaning boshlang’ich kinematik holatiga bog’liqligini ko’rsatadi.

Teskari masalani yechishga doyr 1-misol. Massasi m bo’lgan erkin moddiy nuqta moduli va yo’nalishi o’zgarmas F kuch ta’sirida harakatlanmoqda. Boshlang’ich vaqtda nuqta tezligi v_0 ga teng bo’lib, yo’nalishi kuch yo’nalishi bilan ustma-ust tushgan.Nuqtaning harakat tenglamasi topilsin**.**

1.Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzamiz: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const.}$

2. Dekart koordinat sistemasining x o’qini kuch yo’nalishi bo’ylab yo’naltiramiz va dinamikaning asosiy tenglamasini shu o’qqa proeksiyalaymiz:



$$(x): \quad ma_x = F_x = F. \qquad m\frac{dv_x}{dt} = F.$$

yoki $m\ddot{x} = F.$

3.Differensiyal tartibini pasaytiramiz:

4.O’zgaruvchilarga agratamiz: $dv_x = \frac{F}{m}dt.$

5.Tenglamani ikki tomonini integrallaymiz.

6. Tezlikning proeksiyasini koordinataning vaqt bo’yicha hosilasi orqali ifodalaymiz: $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1.$

7. O’zgaruvchilarga ajratamiz. $dx = (\frac{F}{m}t + C_1)dt.$

8. Tenglamani ikki tomonini integrallaymiz. $\int dx = \int (\frac{F}{m}t + C_1)dt.$

$$\boxed{x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.}$$

9. Boshlang’ich shartlardan foydalanib C_1 *va* C_2 o’zgarmaslarni aniqlaymiz.*t* = 0, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1 = v_0. \qquad x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = x_0.$$

$$\boxed{C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.}$$

Natigada x o’qi bo’ylab tekis o’zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

Dinamikaning to’g’ri va teskari masalalarini yechish uchun umumiy ko’rsatmalar. Yechish tartibi:

1. Harakat differensiyal tenglamasini tuzamiz:

1.1. Agar nuqtaning traektoriyasi noma’lum bo’lsa to’g’ri burchakli (qo’zg’almas), traektoriya ma’lum bo’lsa tabbiy (qo’zg’aluvchi) koordinatalar sistemasini tanlaymiz.

1.2 Nuqtani holatini shunday tanlashimiz kerakki, uning koordinatalari ixtiyori vaqt (agar t>0) uchun musbat (s > 0, x > 0) bo’lsin.

Shu bilan birga tezlik proeksiyasi ham shu holat uchun musbat qiymatga ega deb hisoblaymiz. Tebranma harakatda muvozanatga qaytish mobaynida tezlik proeksiyasi o’zini ishorasini o’zgartiradi,. Bunda, qaralayotgan vaqtda nuqta unig muvozanat holatidan uzoqlashayapti deb qaraladi. Bu tavsiyaning bagarilishi qarshilik kuchini tezlikka bog’lab o’rganilayotgan garayon uchun guda kerak bo’ladi.

1.3.Moddiy nuqtani bog’lanishdan ozod qilish, uni ta’sirini reaksiya kuchi bilan almashtirish, aktiv kuchlarni qo’yish.

1.4. Dinamikaning asosiy qonunini vektor ko’rinishda yozish, uni tanlangan o’qqa proeksiyasini olish, agar berilgan yoki aktiv kuchlar vaqtga, koordinataga, tezlikka bog’liq bo’lsa, ularni shu o’zgaruvchil-ar orqali ifodalash.

2. Differensiyal tenglamani yechish:

2.1. Agar tenglama kanonik (standart) ko’rinishga kelmasa, differensiyal tartibini pasaytirish kerak. Masalan: $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}.$ $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt},$

2.2. O’zgaruvchilarga agratish. Masalan**:**

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x, \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt \qquad \frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2, \Rightarrow \frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt.$$

2.3. Agar tenglamada uchta o’zgaruvchi bo’lsa, o’zgaruvchilarni almashtirish kerak. Masalan: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx,$

va keyin o’zgaruvchilarga agratamiz. $\frac{dv_x dx}{dtdx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$

ва кейин ўзгварувчиларга ажратамиз.

2.4.Tenglamani chap va o’ng tomonlaridagi noaniq integrallarni hisoblash,

masalan:

Boshlang’ich shartlar (masalan, $t = 0$, $v_x = v_{x0}$) dan foydalanib, integral doymiylarini aniqlash kerak:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt \qquad \ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$$

$$\ln v_x\Big|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}kt\Big|_0 + C_1; \quad C_1 = \ln v_{x0}$$

Ilova. Noaniqintegrallarni hisoblash o'rniga, **yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lgan aniq integrallarni hisoblash mumkin.**Integralning pastki chegarasi o'zgaruvchining boshlang'ich qiymati (boshlang'ich sharti) hisoblanadi. U holda integral doymiylarinialohida topish talab qilinmaydi, chunki ular avtomatik ravishda yechimda o'z ifodasini topadi. Masalan:

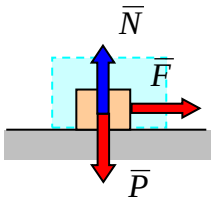
$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m} k dt. \quad ; \qquad \ln v_\tau \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = -\frac{1}{m} kt \Big|_0^t ; \qquad \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m} kt - 0; \;\; \ln v_\tau = -\frac{1}{m} kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5.Tezlikni koordinataning vaqt bo'yicha olingan hosilasi orqali ifodalang, yani,

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$$

va 2.2-2.4 punktlarni takrorlang.

Teskari masalani yechishga 2-misol (Kuch vaqtga bog'liq bo'lgan hol):Og'irligi P bo'lgan yuk F kuch ta'sirida silliq gorizontal tekislik bo'ylab harakatlanmoqda. F kuch vaqtga proporcional ravishda (F=kt) o'zgaradi. Yukni t vaqtda bosib o'tgan yo'li topilsin.



Sanoq sistemasi (dekart koordinatasi)ni shunday tanlaymizki, gism koordinatalari musbat bo'lsin.

1. Harakatdagi ob'ektni moddiy nuqta deb qaraymiz. (Gism ilgarilama harakat qilyapti). Uni bog'lanish (tayanch tekislik)dan bo'shatib (silliq tekislik bo'lgani uchun) normal reaksiya kuchi bilan almashtiramiz:

3.Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzamiz:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$$

4. Dinamikaning asosiy tenglamasini x o'qiga proekciyalaymiz

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}.$$

yoki $(x): \; ma_x = F = kt$ $\boxed{\ddot{x} = \frac{k}{m} t.}$

5. Differensiyaltartibinipasaytiramiz: $m\frac{dv_x}{dt} = kt.$

$$dv_x = \frac{k}{m} t dt.$$

6.O’zgaruvchilarga agratamiz:

7. Tenglamaniikkitomoniniintegrallaymiz:

$$\int dv_x = \int \frac{k}{m} t dt. \qquad \boxed{v_x = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1.}$$

8. $t = 0$, $v_x = v_0 = 0$boshlang’ich shartlardan integral doymiysiC_1 ni topamiz:

$$v_x\big|_{t=0} = \frac{k}{m}\cdot\frac{0^2}{2} + C_1 = v_0 = 0. \qquad \boxed{C_1 = 0.}$$

9.Tezlik proeksiyasini koordinataning vaqt bo’yicha hosilasi bilan almashtiramiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}.$$

10.O’zgaruvchilarga agratamiz:

$$dx = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}dt.$$

11.Tenglamani ikki tomonini integrallaymiz:

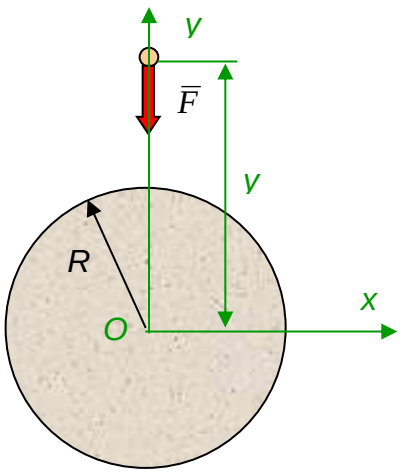
$$\int dx = \int \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}dt. \qquad \boxed{x = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + C_2.}$$

12. $t = 0$, $x = x_0 = 0$boshlang’ich shartlardan o’zgarmasC_2ni:

$$x\big|_{t=0} = \frac{F}{m}\frac{0^3}{6} + C_2 = x_0 = 0. \qquad \boxed{C_2 = 0.}$$

Natigada x o’qi bo’ylab t: vaqt davomida bosib o’tilgan yo’lni ifodalaydigan harakat tenglamasini olamiz.

$$\boxed{x = S = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} = \frac{kg}{P}\frac{t^3}{6}.}$$



Teskari masalani yechishga doyr 3-misol (Kuch koordinatalarga bog’liq bo’lgan hol): m massali moddiy nuqta yer yuzasidan yuqoriga $v_0$tezlik bilan otilgan. Yerni tortish kuchi yerni markazigacha bo’lgan masofaning kvadratiga

teskari proporcional. Tezlikni yerni markazigacha bo'lgan u masofaga bog'liqlik ifodasi aniqlansin.

1. Sanoq sistemasi (dekart koordinatasi)ni shunday tanlaymizki,jism koordinatalari musbat bo'lsin.

2. Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzamiz: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}.$

2. Dinamikaning asosiy tenglamasini y o'qqa proeksiyalaymiz:

3. $(y):\ ma_y = -F = -\frac{k}{y^2}$ yoki $m\ddot{y} = -\frac{k}{y^2}.$

Nuqtaning er ustidagi tezligidan foydalanib proporsionallik koeffisientini topish mumkin: $F = P$ ligi uchun $y = R.$

$$\frac{k}{R^2} = mg. \qquad k = mgR^2.$$

Bundan diffirensial tenglama quyudagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2} \quad \text{Yoki} \qquad \boxed{\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2}.}$$

Diffirensial tartibini kamaytiramiz:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{gR^2}{y^2}.$$

5. O'zgaruvchilarni almashtiramiz: $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y dy}{dydt} = \frac{v_y dv_y}{dy}.$

6. O'zgaruvchilarga ajratamiz:

$$\frac{v_y dv_y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}. \qquad v_y dv_y = -\frac{gR^2}{y^2} dy.$$

8. Chegaraviy qiymatlarni qo'yamiz:

$$\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{y0}^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right).$$

Natijada tezlikni u koordinataga bog'liqlik funksiyasini topamiz

$$\boxed{v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}.}$$

Tezlikni nolga tenglashtirib parvozni maksimal balandligini topish mumkin:

$$\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{\max}} - \frac{1}{R}\right) \Rightarrow \frac{1}{H_{\max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2} \Rightarrow \boxed{H_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}.}$$

Maxrajni nolga aylantirib parvozni maksimal $\to\infty$ balandligini topamiz

$$\boxed{2gR = v_{y0}^2}$$

Bu ifodaga erni radiusi va erkin tushish tezlanish qiymatlarini qo'yibII kosmik tezlik qiymatini topamiz: $\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 км/с}$

Nazorat savollari

1. I.Nyutonning birinchi qonunini ayting.
2. I. Nyutonning ikkinchi qonunini ayting.
3. I.Nyutonning uchunchi qonunini ayting.
4. Nuqta dinamikasining birinchi masalasini izohlang.
5. Nuqta dinamikasining ikkinchi masalasini ayting. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasi nicha xil usulda beriladi?
6. Bog`lanishdagi moddiy nuqta uchun dinamika asosiy tenglamasini yozing.

12 –MA`RUZA

MAVZU: MODDIY NUQTANING TO’G’RI CHIZIQLI TEBRANMA HARAKATLARI

Ma`ruza rejasi:

1. Tiklovchi kuch. Tiklovchi kuch ta`siridagi sharning turg`unlik holatlari.
2. Moddiy nuqta tebranma harakatining turli ko`rinishlari.
3. Erkin tebranma harakat
4. So`nuvchi tebranma harakat
5. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat turlari.

Tayanch so`zlar:

So`nish, tebranish, harakat, tenglama, dinamika, qattiq jism, mexanika qonunlari, moddiy nuqta, kuch, massa, Nyuton, reaksiya, inersiya, sistema, dekart koordinatalar, proeksiya.

Tiklovchi kuch. Tiklovchi kuch ta`siridagi sharning turg`unlik holatlari

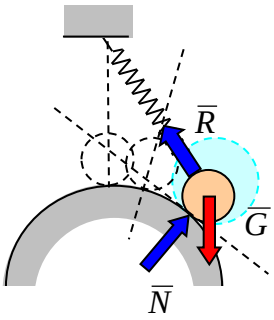
Moddiy nuqtaning to’g’ri chiziqli tebranma harakati– Bu moddiy nuqtaning tiklovchi kuch ta’sirida bo’ladigan tebranma harakatidir. **Tiklovchi kuch** shunday kuchki, bu kuch nuqtani ixtiyoriy chetlanishdan uni muvozanat holatiga qaytarishga harakat qiladi. (masalan, elastiklik kuchi).

Tiklovchi kuch ta’siridagi muvozanat turg’un muvozanat bo’ladi

Tiklovchi kuch bo’lmasa muvozanat turg’un bo’lmaydi

Tiklovchi kuch bo’lmasa muvozanat holati befarq bo’ladi.

Tiklovchi kuch bo’lsadagi muvozanat turg’un boladi.



Kerakli tahlil

Chiziqli tikovchi kuchga misol sifatida prujinaning elastiklik kuchini qarash mumkin.

$$R = c|x| \qquad R_x = -cx$$

U kuch prujinaning chiziqli uzayishi (qisqarishi)ga to’g’ri proportsional bo’lib, doymo prujinaning muvozanat holatiga qarab intiladi va miqdor gihatdan prujinani muvozanat holatiga qarab intiladi va miqdor jihatdan

prujinaning uzunligini bir birlikka o'zgartirish uchun kerak bo'lgan kuchga teng bo'lib SI sistemasida H/м larda o'lchanadi.

Moddiy nuqta tebranma harakatining turli ko'rinishlari:

1.*Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat.*

2. Muhit qarshiligisiz erkin tebranma harakat (so'nuvchi tebranishlar).

3. Majburiy tebranishlar.

4. Muhit qarshiligi ta'siridagi majgburiy tebranishlar.

Erkin tebranma harakat.

Erkin tebranma harakat- faqat tiklovchi kuch ta'sirida vujudga keladi.

Dinamikaning asosiy tenglamasini yozamiz: $m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{R}.$

Koordinatalar sistemasini muvozanat holatiga to'g'ri keladigan O nuqtadan o'tkazamiz va tenglamani x o'qiga proektsiyalaymiz: $m\ddot{x} = -R = -cx.$

Hosil bo'lgan tenglamani standart ya'ni, kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli bir jinsli differenstial tenglama bo'lib, uning yechimi mos xarakteristik tenglamaning ildizlari orqali topiladi

$$x = e^{zt}. \qquad \ddot{x} = z^2 e^{zt}. \qquad z^2 + k^2 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari mavhum va o'zaro teng : $z_{1,2} = \pm ki.$

Differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Nuqtaning tezligi: $\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$ Boshlang'ich shart: $t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0.$

O'zgarmaslarni aniqlaymiz

$$x_0 = C_1 \cos k0 + C_2 \sin k0 = C_1 1 + C_2 0. \qquad C_1 = x_0.$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin k0 + kC_2 \cos k0 = -kC_1 0 + kC_2 1. \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Demak, erkin tebranma harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi.

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

Erkin tebranishning hosil bo'lishi x_0 boshlang'ich silgish v_0 boshlang'ich tezlikka bog'liq.

Tenglamani bir had ko'rinishida ifodalash mumkin: $x = a\sin(kt+\beta).$

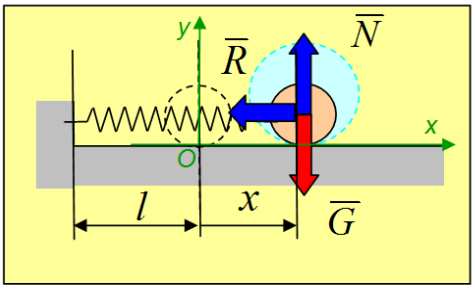
Bu yerda a – ampletuda, β – boshlang'ich faza.

Yangi a i β o'zgarmaslar C_1 i C_2 o'zgarmaslar bilan bog'lanishda bo'ladi:

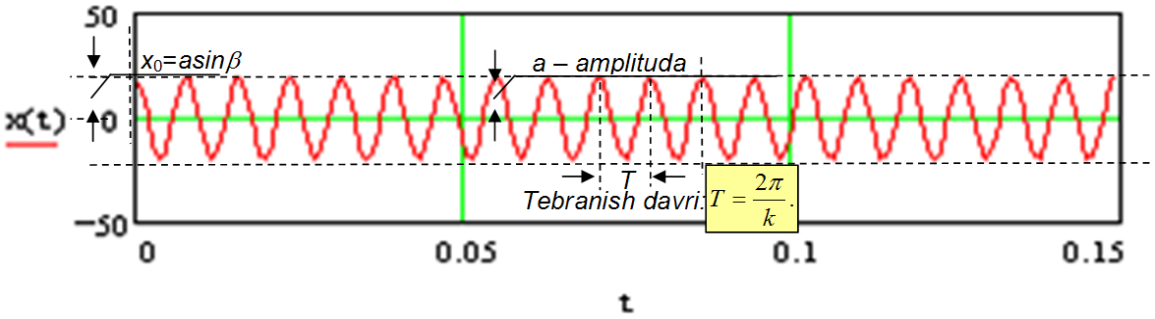
$$C_1 = a\sin\beta; \qquad C_2 = a\cos\beta.$$

a i β larni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} C_1^2 = a^2\sin^2\beta; \\ C_2^2 = a^2\cos^2\beta. \end{cases} + \Rightarrow C_1^2 + C_2^2 = a^2. \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}. \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{a\sin\beta}{a\cos\beta} = tg\beta. \Rightarrow tg\beta = \frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{k}} = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$$



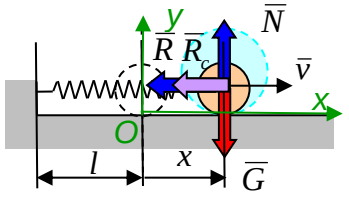
Tiklovchikuch kuch – muvozonatga keltiruvchi kuchdir



Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati.

Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati – moddiy nuqtaning tebranma harakati tiklovchi kuch va qarshilik kuchi ta'sirida vujudga keladi.

Harakat qarshilik kuchining siljish yoki tezlikka bog'liqligi, harakatga qarshilik qiluvchi muhit yoki bog'lanishning fizik xarakteri bilan aniqlanadi. Eng



oddiy bog'lanish tezlikka bog'liq bo'lgan chiziqli bog'lanish hisoblanadi. (yopishqoq muxitdagi qarshilik).

$$\overline{R}_c = -\alpha\overline{v};\quad R_{cx} = -\alpha\dot{x}.$$

α – yopishqoqlik koeffitsienti

Dinamikaning asosiy tenglamasi

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R} + \overline{N} + \overline{R}_c.$$

Dinamika tenglamasining *x* o'qidagi proektsiyasi:

$$(x):\ m\ddot{x} = -R_x - R_{cx} = -cx - \alpha\dot{x}$$

Tenglamani standart ko'rinishga keltiramiz.

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \Rightarrow$$

bu yerda $\boxed{2n = \frac{\alpha}{m}, k^2 = \frac{c}{m}.}$

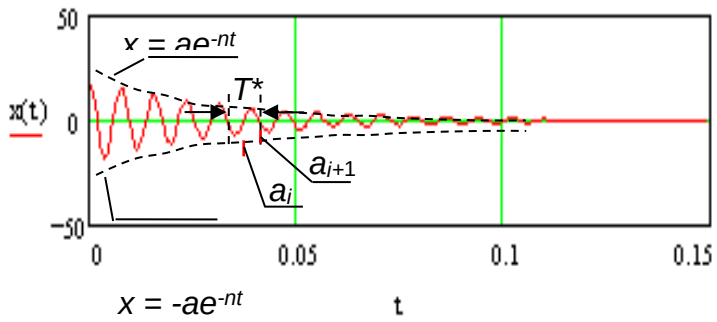
Xarakteristik tenglama $\boxed{z^2 + 2nz + k^2 = 0}$

va uning ildizlari $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$

Bu differentsial tenglamaning umumiy yechimi xarakteristik tenglama ildizlarining qiymatiga ko'ra har hil bo'ladi. $z_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$

1. *n* < k – kichik qarshilikli hol: - harakat tenglama ildizlari kompleks har hil bo'ladi.

yoki $\boxed{x = e^{-nt} a\sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta).}$



So'nuvchi tebranish chastotasi:

So'nuvchi tebranish davri:

$$\boxed{T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.}$$

Tebranish dekrementi:

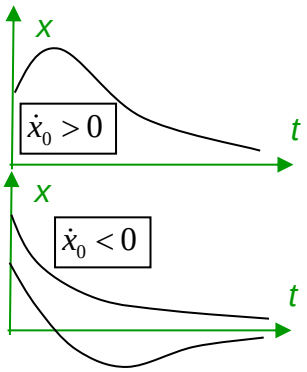
$$\boxed{\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{ae^{-n(t_i + \frac{T^*}{2})}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T^*}{2}}.}$$

Tebranish logarifmik dekrementi $\lambda = -n\frac{T^*}{2}.$

Tebranishning so'nishi juda tez bo'ladi. Muhitning qarshilik kuchi ta'sirida tebranish ampletudasi vaqt o'tishi bilan kamayib boradi.

2. *n* > k – katta qarshilikli hol: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

- *harakat tenglama ildizlari haqiqiy va har hil bo'ladi.*



$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t})$ yoki $x = e^{-nt} a\,\mathrm{sh}(\sqrt{n^2-k^2}t + \beta).$

Bunda harakat tebranuvchan bo'lmaydi.

3. *n* = k: *bunda harakat tenglamaning ildizi haqiqiy va karrali bo'ladi, yani*

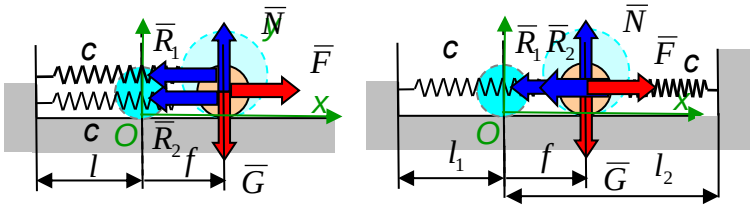
$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$$

Bunda harakat tenglamaning ildizi haqiqiy va karrali bo'ladi, ya'ni

- Bu holda ham harakat tebranma bo'lmaydi (aperiodik emas):

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{ae^{-n(t_i + \frac{T^*}{2})}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T^*}{2}}.$$

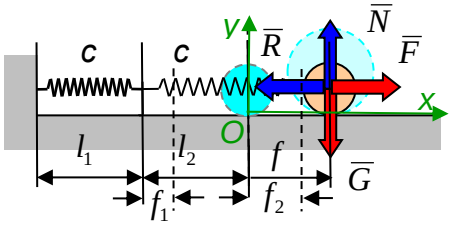
Prujinalarni ulanish turlari. Ekvivalent qattiqlik.



$$\sum X_i = 0; \quad F = R_1 + R_2.$$

$$F = c_1 f + c_2 f = (c_1 + c_2) f = c_{экв} f$$

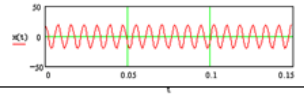
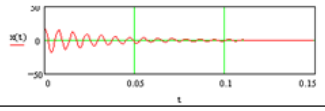
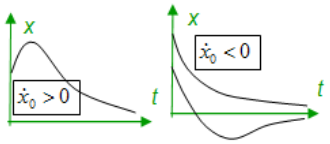
$$c_{экв} = (c_1 + c_2)$$



$$\sum X_i = 0; \quad F = R.$$

$$f = f_1 + f_2 = \frac{R}{c_1} + \frac{R}{c_2} = R\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = \frac{F}{c_{экв}}.$$

$$c_{экв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Differentsial tenglamalar	Xarakteristik tenglamalar	Xarakat. tenglama ildizlari		Differentsial tenglama yechimlari	Grafik
$\ddot{x}+k^2x=0$ $k^2=\frac{c}{m}$	$z^2+k^2=0$	$z_{1,2}=\pm ik$		$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$ $x=a\sin(kt+\beta).$	
		$n<k$	$z_{1,2}=-n\pm i\sqrt{k^2-n^2}$	$x=e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}t+C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}t)$ $x=e^{-nt}a\sin(\sqrt{k^2-n^2}t+\beta).$	
$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$ $2n=\frac{\alpha}{m},k^2=\frac{c}{m}.$	$z^2+2nz+k^2=0$	$n>k$	$z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$	$x=e^{-nt}(C_1e^{\sqrt{n^2-k^2}t}+C_2e^{-\sqrt{n^2-k^2}t})$ $x=e^{-nt}a\mathrm{sh}(\sqrt{n^2-k^2}t+\beta).$	
		$n=k$	$z_{1,2}=-n$	$x=e^{-nt}(C_1t+C_2)$	

Nazorat savollari

1.Tebranma harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tebranma harakatni izohlaydigan asosiy parametrlarni yozing.
3.Davr deb nimaga aytiladi?
4.Chastota deganda nimani tushunasbz?
5.Faza deb nimaga aytiladi?
6.Tebranma harakat necha turga bo`linadi?
7.Erkin tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
8.Qanday harakat majburiy tebranma harakat deyiladi?
9.So`nuvchi tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
10.Tebranma harakat amplitudasi deb nimaga aytiladi?
11.Moddiy nuqta garmonik tebranma harakat tenglamasini yozing.

13-Ma`ruza

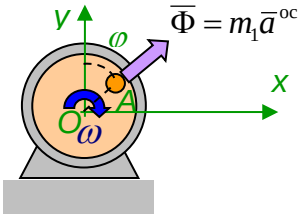
MAVZU: MODDIY NUQTANING TO`G`RI CHIZIQLI MAJBURIY TEBRANMA HARAKATLARI

Ma`ruza rejasi:

1. Majburiy tebranma harakat haqida tushuncha
2. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi
3. Turli chastotali majburiy tebranishlar. So`nuvchi tebranishlar
4. Chastotalar tengligidagi tebranish differensial tenglamasi.
5. Muhit qarshiligi ta`siridagi majburiy tebranishlar.

Majburiy tebranma harakat haqida tushuncha

Majburiy tebranma harakat haqida tushuncha– tiklovchi muvozanatlovchi) kuch bilan bir qatorda vaqt mobaynida davriy ravishda o'zgaruvchi, ya'ni **qo`zg`otuvch kuch** ta'siridagi moddiy nuqtaning harakatidir. **Qo`zg`otuvch kuch** tabiatan o'zgaruvchan bo'ladi. Masalan, xususiy holda aylanayotgan rotorning muvozanatlashmagan m_1 massasini inertsial ta'siri kuchning proektsiyasini garmonik o'zgarishiga olib keladi:

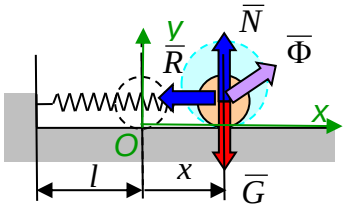


$$\overline{\Phi} = m_1\overline{a}^{oc}$$

$$\Phi = m_1\omega^2 OA = $$

$$= m_1 p^2 OA = H$$

$$\Phi_x = H\sin pt. \qquad (10.1)$$



Qo`zg`otuvch kuchning Ox o`qidagi proektsiyasi ifoda bilan aniqlanadi. Bunday kuch ta`siridagi tebranma harakat majburiy tebranishlar deb ataladi. (10.1) formuladagi p-qiymatni qo`zg`otuvch kuchning chastotasi deb ataladi.

Vaqtga bog`liq bo`lgan qo`zg`otuvch kuch, boshqaca qonuniyat bo`yicha ham o`zgarishi mumkin. Lekin biz, faqat (10.1) ko`rinishdagi qonuniyat bilan o`zgaruvchi kuchlar ustida mavzu olib boramiz xolos. Ushbu (10.1) ko`rinishdagi qo`zg`otuvchi kuchni garmonik qo'zgatuvchi kuch deb ataladi.

Dinamikaning asosiy tenglamasi: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_i = \overline{G} + \overline{R} + \overline{N} + \overline{\Phi}.$

Tenglamaning o'qdagi proektsiyasi: $(x): m\ddot{x} = -R_x + \Phi_x = -cx + H\sin pt$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{H}{m}\sin pt.$$

Tenglamani standart ko'rinishga keltiramiz: $\ddot{x}+k^2x=\frac{H}{m}\sin pt.$

Bu bir jinsli tenglamaning yechimi ikki qismdan iborat:

$$\ddot{x}+k^2x=0$$

$x = x_1 + x_2$: bunda x_1 – mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va x_2 – bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi:

Umumiy yechimi : $x_1=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$

Xususiy yechim tenglamaning o'ng tomoni ko'rinishiga qarab tanlanadi:

$x_2=A\sin pt. \Rightarrow \dot{x}_2=pA\cos pt. \Rightarrow \ddot{x}_2=-p^2A\sin pt. \Rightarrow -Ap^2\sin pt+k^2A\sin pt=\frac{H}{m}\sin pt.$

Hosil bo'lgan tenglik ixtiyoriy t uchun o'rinli bo'ladi..

Bundan $A(-p^2+k^2)=\frac{H}{m}$ yoki $A=\frac{H}{m(k^2-p^2)}.$

Shunday qilib xususiy yechim**:** $x_2=\frac{H}{m(k^2-p^2)}\sin pt.$

Natijada to'la yechim:

$x=x_1+x_2=C_1\cos kt+C_2\sin pt+\frac{H}{m(k^2-p^2)}\sin pt.$ yoki $x=a\sin(pt+\beta)+\frac{H}{m(k^2-p^2)}\sin pt.$

C_1 va C_2 yoki a va β o'zgarmaslar boshlang'ich shartlardan foydalanib umumiy yechimdan aniqlanadi:

Demak moddiy nuqtaga bir vaqtning o'zida tiklovchi va qo'zg'atuvchi kuchlar ta'sir etsa moddiy nuqta murakkab tebranma harakat qiladi, bunda erkin (x_1) va majburiy (x_2) **tebranishlar yig'indisi olinadi.**

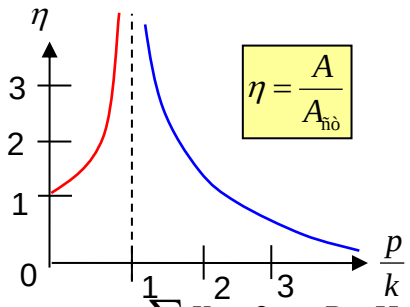
1. *Agar $p < k$ bo'lsa kichik chastotali (tebranishli) majburiy tebranishlar hosil bo'ladi, bu holda tebranish fazasi* qo`zg`otuvchi kuch fazasiga mos keladi:

$$x_2=\frac{H}{m(k^2-p^2)}\sin pt.$$

2. Agar **p > k bo'lsa katta chastotali tebranishli majburiy tebranishlar hosil bo'ladi**: bunda tebranish fazasi bunda qo`zg`otuvchi kuch fazasiga qarama-qarshi bo'ladi.

$$x_2 = -\frac{H}{m(p^2-k^2)}\sin pt = \frac{H}{m(p^2-k^2)}\sin(pt-\pi).$$

Dinamik koeffitsient deb majburiy tebranish ampletudasini ***H* = const** o'zgarmas kuch ta'siridagi nuqtaning static chetlanishiga bo'lgan nisbatiga aytiladi



$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ñò}}}$$

Majburiy tebranish ampletudasi:

$$A = \frac{H}{m(k^2-p^2)}$$

Statik chetlanishni muvozanat tenglamasidan topish mumkin:

$$\sum X_i = 0;\quad -R + H = 0$$

bu yerda: $R = cx = cA_{\text{ñò}} = mk^2 A_{\text{ñò}} = H.$

bundan: $A_{\text{ñò}} = \frac{H}{mk^2}.$

Shunday qilib p < k (kichik tebranishli majburiy tebranish)da dinamik koeffitsient:

p > k (katta chastotali majburiy tebranish) da dinamik koeffitsient: $\eta = \frac{k^2}{p^2-k^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2}-1}.$

Rezonans *hodisasi, majburiy tebranish chastotasi erkin tebranish chastotasiga* ***(p = k) (teng bo'lsa)*** *mos kelsa, sodir bo'ladi.* Bu hodisa noto'g'ri balansirovka qilingan va elastik tayanchga mahkamlangan rotorlarni ishga tushirish va to'xtatishda hosil bo'ladi.

Chastotalar tengligidagi tebranish differentsial tenglamasi:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{H}{m}\sin kt.$$

Umumiy yechimi: $x_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$

Xususiy yechimni o'ng tomon $x_2 = A\sin kt$

ko'rinishida tanlash mumkin emas, chunki chiziqli bog'liq yechim hosil bo'ladi. (umumiy yechimga qarang).

$$x_2 = Bt\cos kt.$$

Xususiy yechimni ko'rinishda tanlaymiz va hosila olamiz:

$$\dot{x}_2 = B\cos kt - Btk\sin kt. \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2} = -Bk\sin kt - Bk\sin kt - Btk^2\cos kt = \boxed{-2Bk\sin kt - Btk^2\cos kt.}$$

Differentsial tenglamaga qo'yamiz:

$$-2Bk\sin kt - Btk^2\cos kt + k^2Bt\cos kt = \frac{H}{m}\sin kt. \qquad -2Bk\sin kt = \frac{H}{m}\sin kt. \qquad \boxed{B = \frac{-H}{2km}.}$$

Shunday qilib, olingan yechim: $\boxed{x = x_1 + x_2 = C_1\cos kt + C_2\sin kt - \frac{Ht}{2mk}\cos kt.}$

yoki $\boxed{x = a\sin(kt+\beta) + \frac{Ht}{2mk}\sin(kt - \frac{\pi}{2}).}$

Rezonansda majburiy tebranish ampletudasi vaqtga proportsional ravishda cheksizgacha o'sadi.

Muhit qarshiligi ta'siridagi majburiy tebranishlar.

Yopishqoq muhit qarshiligi ta'siridagi nuqtaning majburiy tebranma harakat differentsial tenglamasi: $\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{H}{m}\sin pt.}$

Buning umumiy yechimini n ning к ga nisbatiga bog'liq ravishda topiladi.

Xususiy yechimni $\boxed{x_2 = A_c\sin(pt - \varepsilon)}$

ko'rinishda aniqlaymiz va hosila olamiz:

$$\dot{x}_2 = A_c p\cos(pt-\varepsilon). \qquad \ddot{x}_2 = -A_c p^2\sin(pt-\varepsilon).$$

Bularni differentsial tenglamaga qo'yamiz va quydagilarni olamiz:

$$-A_c p^2\sin(pt-\varepsilon) + 2nA_c p\cos(pt-\varepsilon) + k^2A_c\sin(pt-\varepsilon) =$$
$$= \frac{H}{m}\sin(pt-\varepsilon+\varepsilon) = \frac{H}{m}\sin(pt-\varepsilon)\cos\varepsilon + \frac{H}{m}\cos(pt-\varepsilon)\sin\varepsilon.$$

Bir xil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

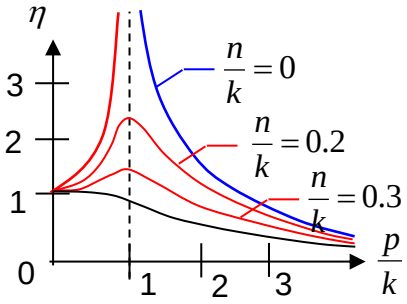
$$\begin{cases} A_c(k^2 - p^2) = \frac{H}{m}\cos\varepsilon; \\ 2npA_c = \frac{H}{m}\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shib majburiy tebranish ampletudasini topamiz: $\boxed{A_c = \frac{H}{m\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2}}.}$

Ikkinchi tenglamani birinchisiga bo'lib majburiy tebranishning siljish fazasini aniqlaymiz: $$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Shunday qilib muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat tenglamasi, masalan n < k (kichik qarshilikli) bo'lganda**:**

$$x = x_1 + x_2 = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t) + A_c \sin(pt - \varepsilon).$$



Majburiy tebranish muhit qarshiligi bo'lganda so'nmaydi.

Majburiy tebranish chastotasi va davri o'yg'otuvchi kuch chastotasi va o'zgarish davriga teng. Rezonansda dinamik koeffitsent *n* va *κ larni nisbatiga bog'liq holda chekli qiymatga ega*.

Nazorat savollari

1. Rezonans hodisasini izohlang.
2. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini yozing.
3. Moddiy nuqta erkin tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.
4. Moddiy nuqta so`nuvchi tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.

14-ma`ruza

MAVZU: MEXANIK TIZIM DINAMIKASIGA KIRISH

Ma`ruza rejasi:

1. Mexanik sistema haqida tushuncha. Tashqi va ichki kuchlar. Sistemaning massasi. Massalar markazi.
2. O'qqa nisbatan inertsiya momenti. Inertsiya radiusi.
3. Mexanik sistema massalari markazining harakati haqidagi teorema.
4. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremadan kelib chiqadigan asosiy qonunlar
5. Inersiya momenti nazariyasi elementlari

Mexanik sistema dinamikasi.

Moddiy nuqtalar sistemasi yoki mexanik sistema deb ta'sirlashish qonunlari umumiy bo'lgan va o'zaro ta'sirlashayotgan moddiy nuqtalar yoki moddiy jismlar to'plami aytiladi. (Har bir nuqta yoki jismning holati yoki harakati qolgan barcha nuqtalar holati yoki harakatiga bog'liq).

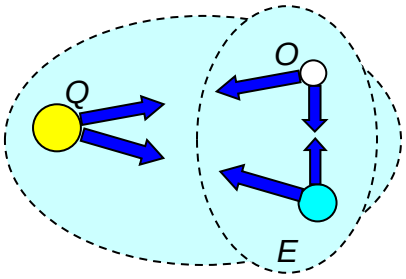
Erkin nuqtalar sistemasi deb harakati hech qanday bog'lanish bilan cheklanmaydigan (masalan, planetalar sistemasi, bunda planeta nuqta deb qaraladi) sistemaga aytiladi.

Erkin bo'lmagan nuqtalar sistemasi yoki erkin bo'lmagan mexanik deb moddiy nuqta yoki jismning harakati sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar yordamida cheklangan bo'ladigan sistemaga aytiladi (masalan, mexanizm, mashina va boshqalar).

Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar. Oldin ma'lum bo'lgan kuchlar klassifikatsiyasiga qo'shimcha ravishda yangi kuchlar **(aktiv va reaktiv kuchlar)** klassifikatsiyasi kiritiladi.:

1. ***Tashqi kuchlar (e)*** *deb nuqta yoki jismlar sistemasiga, sistema tarkibiga kirmaydigan nuqta va jismlar tomonidan ta'sir qiladigan kuchlarga aytiladi.*

2. ***Ichki kuchlar (i)*** *deb sistemaga kiradigan moddiy nuqta va jismlar orasidagi o'zoro ta'sir kuchlariga aytiladi.* Bitta kuchning o'zi ham, ham tashqi, ham ichki kuch bo'lishi mumkin. Bunda qanaqa mexanik sistema qaralayotganiga bog'liq.



Masalan: quyosh sistemasida, yer (E) va oy (O) orasidagi o'zaro tortishish kuchlari ichki kuch hisoblanadi. Agarda yer va oy sistemasi qaralsa quyosh (Q) tomonidan qo'yiladigan o'zaro tortish kuchlari tashqi kuch hisoblanadi.

Ta'sir va aks ta'sir qonuniga ko'ra, har bir F_k ichki kuchga modul jihatidan teng va qarama-qarshi tomonga yo'nalgan boshqa bir F_k`ichki kuch mos keladi.

Bundan ichki kuchlarning **ikkita ajoyib xossasi kelib chiqadi:**

1. *Barcha ichki kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'ladi:*

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0.$$

2. *Barcha ichki kuchlarning ixtiyoriy markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'ladi:* $\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.$

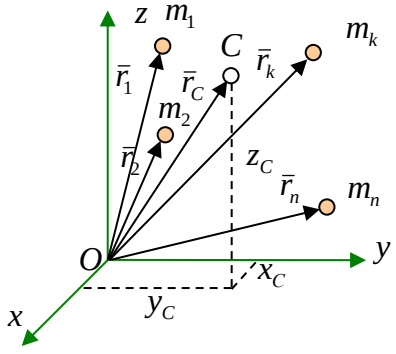
Yoki uning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0. \qquad \sum M_{kx}^i = 0; \quad \sum M_{ky}^i = 0; \quad \sum M_{kz}^i = 0.$$

Eslatma. Bu tenglamalar muvozanat tenglamalariga o'xshasada, ular muvozanat tenglamalariga o'xshasada, ular muvozanat tenglamalari o'xshasada, ular muvozanat tenglamalari emas, chunki ichki kuchlar har xil nuqta va jismlar sistemasiga qo'yilgan va bu kuchlar nuqta (jism)larni bir-biriga nisbatan harakatlantirishi mumkin. Bu tenglamalardan ko'rinadiki, ichki kuchlar bir butun deb qaraladigan sistemaning harakatiga ta'sir qilmaydi

Moddiy nuqtalar massalarining markazi. *Sistema harakatini to'liq yozish uchun masalar markazi deb ataladigan* ***geometrik nuqta*** *kiritiladi*, uning radius-vektori qo'yidagi ifoda orqali aniqlanadi: $\bar{r}_C = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},$

bunda M – butun sistemaning masasi: $M = \sum m_k.$



Uning koordinata o'qlaridagi proektsiyasi:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}.$$

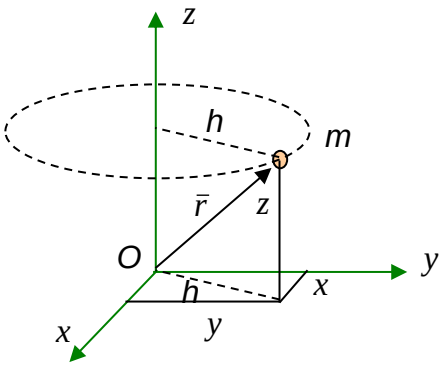
Massalar markazi formulalari og'irliq markazi formulalariga o'xshash. Ammo massalar markazi tushunchasi ancha umumiyroq, chunki u tortishish kuchi yoki og'irliq kuchiga bog'liq emas.

Inertsiya momentlari nazariyasi elementlari.

Qattiq jismning aylanma harakatida aylanish o'qiga nisbatan inertsiya momenti inertsiya o'lchovi hisoblanadi (harakatni o'zgarishiga qarshilik qiluvchi). Inertsiya momentining ta'rifi va uni hisoblash usullari haqidagi asosiy tushunchalarni qaraymiz.

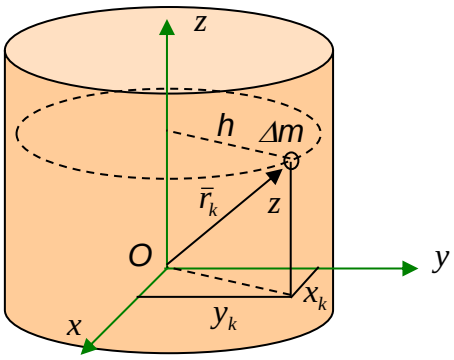
1. Moddiy nuqtaning o'qqa nisbatan inertsiya momenti:

$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)$$



Moddiy nuqtaning o'qqa nisbatan inertsiya momenti nuqta massasini nuqtadan o'qqacha bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi.

Qattiq jismning o'qqa nisbatan inertsiya momenti.



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Qattiq jismning o'qqa nisbatan inertsiya momenti har bir nuqta massasini nuqtadan o'qqacha bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Qattiq jismning inertsiya momenti integral yig'indisi yordamida aniqlanadi.

$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$ **- qattiq jismning z o'qqa inersiya momenti**

O’q inertsya momentidan tashqari boshqa ko’rinishdagi inertsiya momentlari ham mavjud:

$\boxed{I_{xy} = \int xydm}$ - **qattiq jismning markazdan qochma inersiya momenti.**

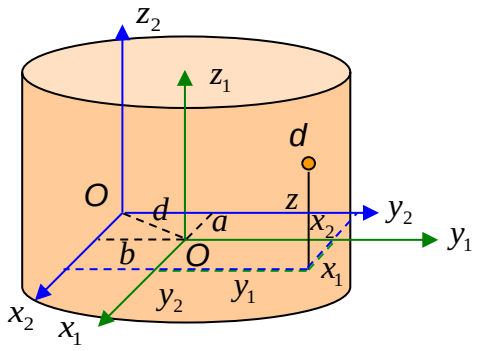
$\boxed{I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2)dm}$ - **qattiq jismning qutb inersiya momenti.**

3. Qattiq jismning parallel o’qqa nisbatan inertsiya momentlari haqidagi teorema – parallel o’qlarga o’tish formulasi*:*

$$I_{z2} = \int (x_2^2 + y_2^2)dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2)dm = \boxed{\int (x_1^2 + y_1^2)dm} + 2a\boxed{\int x_1 dm} + 2b\boxed{\int y_1 dm} + \boxed{(a^2 + b^2)}\boxed{\int dm.}$$

I_{z1} S_{y1} S_{x1} M

d^2



Bu yerda,

I_{z1} -boshlang’ich o’qqa nisbatan inertsiya momenti;

S_{y1} S_{x1} - Boshlang'ich o’qqa nisbatan static moment

d^2 - z_1 va z_2 o’qlar orasidagi masofa

M - Jismning massasi

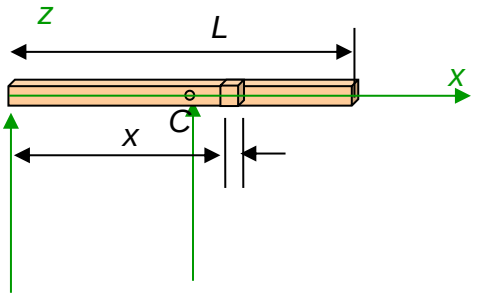
Shunday qilib: $\boxed{I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2 M.}$

Agarda z_1 o’q massalar markazidan o’tsa, u holda static momentlar nolga teng bo’ladi. U holda $\boxed{I_{z2} = I_{zC} + d^2 M.}$ bo’ladi.

4. Bir jinsli o’zgarmas kesimli sterjenning o’qqa nisbatan inertsiya momenti:

x masofada $dV = Adx$

Elementar hajm ajratamiz: $dm = \rho A dx$



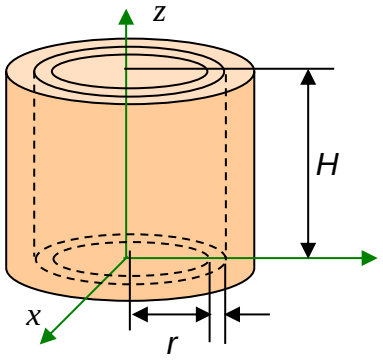
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Markaziy o’qqa (og’irliq markazi orqali o’tuvchi) nisbatan inertsiya momentini hisoblash uchun, o’qlarni o’zgartirish va integrallash chegarasini (-*L*/2, *L*/2) oraliqda olish kerak.

Endi parallel o’qlarga o’tish formulasini yozamiz:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \Rightarrow \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M. \qquad I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \boxed{\frac{ML^2}{12}.}$$

5. Bir jinsli tutash silindrning simmetrik o’qiga nisbatan inertsiya momenti:



dV = 2πrdrH elementar hajmini ajratamiz

(*r* – yupqa silindr radiusi):

Elementar massa: $dm = \rho 2\pi r dr H$

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

Bunda $V=\pi R2H$ silindr hajmi

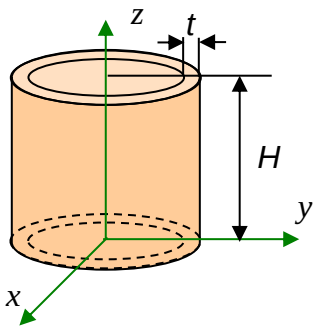
Qalin (yug’on) silindrning inertsiya momentini hisoblash uchun integrallash chegarasini R_1 dan R_2 gacha o’zgartieamiz ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_{R1}^{R2} = \rho 2\pi H\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}.$$

6. Yupqa silindrning simmetriya o’qiga nisbatan inertsiya momenti (*t* <<*R*):

Silindr qalinligi juda kichik bo’lganligi uchun barcha nuqtalar o’qdan bir hil R masofada joylashgan va integrallash shart emas. Hajmi V = 2πRtH. (qalinligi t va radiusi R gat eng o’lgan yupqa silindr

$$I_z = R^2 \rho 2\pi RtH = \boxed{MR^2.}$$

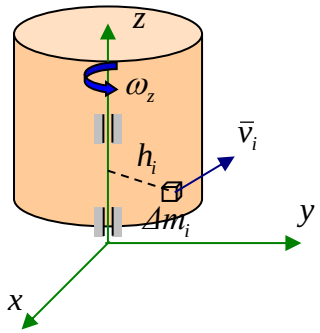


Bu formuladan foydalanib, qalin kesimli silindrlarning inertsiya momentini xisoblash mumkin:

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2)}{2} = \frac{M(2R^2 \boxed{-2Rt + t^2})}{2} << 2R^2.$$

Silindr balandligi inertsiya momentlar formulalariga kirmaydi, bu tasdiq yupqa to'liq disk va g'ildirak sirti (yupqa xalqa) uchun ham o'rinli bo'ladi.

7. Qattiq jismning inersiya momenti:



Kichik hajmli elementar (diskret) Δm_i massa ajratamiz

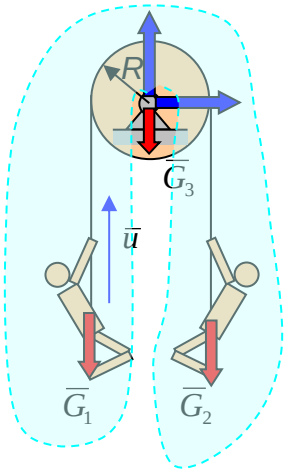
$$\Delta K_{zi} = h_i \Delta m_i v_i = h_i \Delta m_i \omega_z h_i = \omega_z h_i^2 \Delta m_i.$$

$$K_z = \sum \Delta K_{zi} = \omega_z \sum h_i^2 \Delta m_i = \boxed{\omega_z I_z.}$$

Yoki kichik cheksiz bo'laklarga bo'lib, integral yig'indisiga o'tsak:

$$dK_z = hdmv = hdm\omega_z h = \omega_z h^2 dm. \qquad K_z = \int dK_z = \omega_z \int h^2 dm = \omega_z I_z.$$

Ay momenti burchak tezlikni aylanish o'qiga nisbatan inertsiya momentiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi.



1-misol: Og'irligi bir hil $G_1 = G_2$ bo'lgan ikki kishi, og'irligi $G_3 = G/4$ bo'lgan tutash blokka tashlangan arqonga osilib tuibdi. Ma'lum vaqtdan so'ng ulardan biri arqon orqali u nisbiy tezlik bilan itarila boshladi. Bu odamlarning ko'tarilish tezliklari aniqlansin.

1. Harakat ob'ektini tanlaymiz (blok odamlari bilan):
2. Bog'lanishdan ozod qilamiz (blok tayanchi)
3. Bog'lanish reaktsiyasi bilan almashtiramiz (podshipnik)
4. Aktiv kuchlarni qo'shamiz (og'irlik kuchi)
5. Blokning aylanish o'qiga nisbatan sistema kinetic momentining o'zgarishi haqidagi teoremani yozamiz:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = G_1 R - G_2 R = 0.$$

Tashqi kuch momenti nolga teng bo'laganligidan, kinetik momentning o'zgarmasligini ko'ramiz: $K_z = const. \Rightarrow K_{z0} = K_z.$

Boshlang’ich vaqt, ya’ni $t = 0$ da jism muvozanatda bo’lgan va $K_{z0} = 0$.

Bir kishi arqon bo’ylab harakatlanganda, butun sistema harakatga keladi, lekin sistema kinetic momenti nolga tengligicha qoladi: $K_z = 0$.

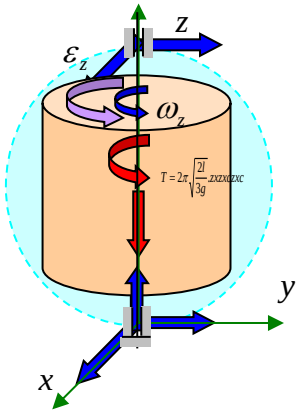
Sistema kinetik momenti ikkala odam kinetik momentlari bilan blok kinetik momentlarining yig’indisiga teng bo’ladi:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} + K_{z3} = -\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_2}{g}v_2 R + I_3\omega_3 = 0.$$

Bunda v_2 – ikkinchi odam tezligi, u arqon tezligiga teng:

$$I_z = \frac{M_3R^2}{2} = \frac{G_3R^2}{2g} = \frac{G_1R^2}{4\cdot 2g}. \qquad \omega_3 = \frac{v_2}{R}.$$

$$-\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_1}{g}v_2 R + \frac{G_1R^2}{4\cdot 2g}\frac{v_2}{R} = 0. \qquad \boxed{v_2 = \frac{8u}{17}.} \qquad \boxed{v_1 = u - \frac{8u}{17} = \frac{9u}{17}.}$$



Qattiq jismning o’qqa nisbatan aylanma harakati tenglamasi:

Qo’zg’almas o’q atrofida aylanayotgan qattiq jism kinetik momentining o’zgarishi haqidagi teorema:

$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$$

$$K_z = \omega_z I_z.$$

Aylanayotgan qattiq jismning kinetik momenti:

Tashqi kuchlarning aylanish o’qiga nisbatan momenti aylanish momentiga teng bo’ladi (reaktsiya va og’irlik кучдан moment hosil bo’lmaydi): $M_z^e = M_z = M_{ayl.}$

Kinetik moment va aylanma momentlarni teoremaga qo’yamiz:

$$\frac{d(\omega_z I_z)}{dt} = M_z = M_{ayl.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z\varphi = M_z = M_{ayl.}}$$

Nazorat savollari

1.Mexanik sistema dinamikasining asosiy tenglamasini yozing.

2.Sistema dinamikasida ichki va tashqi kuchlar qanday ifodalanadi?

3.Mexanik sistema harakatining differensial tenglamasini Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yozing.

4.Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani ta’riflang va matematik ifodasini yozing.

15-ma`ruza

MAVZU: MEXANIK TIZIM MASSALAR MARKAZINING HARAKATI VA HARAKAT MIQDORINING O'ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMALAR

Ma`ruza rejasi:

1. Kuch impulsi.
2. Moddiy nuqta va sistemaning harakat miqdori.
3. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema
4. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan kelib chiqadigan xulosalar (saqlanish qonuni)
5. Eyler teoremasi-sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani tutash muhit (suv)ni harakatini o'rganishga qo'llash.

Mexanik sistema massalari markazining harakati haqidagi teorema

n ta moddiy nuqtadan iborat sistemani qaraymiz. Har bir nuqtaga qo'yilgan kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga bo'lamiz ularni mos $\boldsymbol{F}_{ke}$ va $\boldsymbol{F}_{ki}$ teng etuvchilarga ajratamiz. Har bir nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasini yozamiz:

$$\boxed{m_k\bar{a}_k = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k} \quad \text{yoki} \quad m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k.$$

hamma nuqtalar bu tenglamalarni hadma-had qo'shamiz:

$$\sum m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum\bar{F}^e_k + \sum\bar{F}^i_k.$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\bar{R}^e \qquad \bar{R}^i = 0$$

Tenglamani chap qismidagi massani differentsiyal ostiga kiritamiz va hosilalar yig'indisini yig'indilar hosilasiga almashtiramiz:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k\bar{r}_k\right) = \bar{R}^e.$$

Massalar markazining ta'rifidan: $\boxed{M_{\bar{r}_C} = \sum m_k\bar{r}_k.}$

Buni yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz: $\frac{d^2}{dt^2}(M\bar{r}_C) = \bar{R}^e.$

sistema massasini hosila belgisidan tashqariga chiqarsak

$$M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2}=\bar{R}^e \quad \text{yoki} \quad \boxed{M\bar{a}_C=\bar{R}^e}$$

Sistema massasini massalar markazining tezlanishiga ko'paytmasi tashqi kuchlarning bosh vektoriga teng bo'ladi.

$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^e=\sum X_k^e;\\ M\ddot{y}_C &= R_y^e=\sum Y_k^e;\\ M\ddot{z}_C &= R_z^e=\sum Z_k^e. \end{aligned}}$$

Koordinatalar o'qiga proektsiyalari:

Sistemaning massalar markazi, massasi sistemaning massasiga teng bo'lgan va sistemaga qo'yilgan barcha kuchlar ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo'lar ekan.

Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremadan kelib chiqadigan asosiy qonunlar (Massalar markazi harakatining saqlanish qonuni)

1. Agarda $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlarining bosh vektori $(\boldsymbol{R}_e = 0)$ nol bo'lsa, u holda massalar markazining tezligi o'zgarmas, ya'ni $\boldsymbol{v}_C =$ **const** bo'ladi, (massalar markazi teng o'lchovli to'g'ri chiziqli harakat qiladi- **massalar markazi harakatining saqlanish qonuni**).

2. Agarda $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlar bosh vektorining x o'qidagi proektsiyasi ($R_{xe} = 0$) nol bo'lsa, massalar markazi tezligining x o'qidagi proektsiyasi ($v_{Cx} =$ const) o'zgarmas bo'ladi. (massalar markazi o'q bo'ylab teng o'lchovli harakat qiladi). Bu tasdiq *y va z o'qlari uchun o'rinli bo'ladi.*

3. Agarda $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng ya'ni $\boldsymbol{R}_e = 0$ bo'lsa va boshlang'ich paytda massalar markazining tezligi ham nol, ya'ni $\boldsymbol{v}_C = 0$ bo'lsa, sistema massalar markazining radius- vektori $(\boldsymbol{r}_C =$ **const)** o'zgarmas bo'ladi, (massalar markazi tinch holatda-massalar markazi holatining saqlanish qonuni).

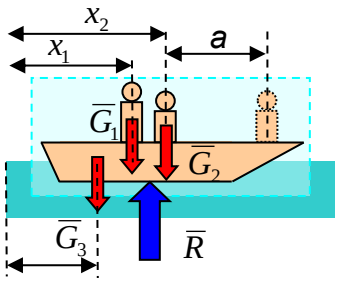
4. Agarda $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida tashqi kuchlar bosh vektorining x o'qdagi proektsiyasi ($R_{xe} = 0$) nolga teng va boshlang'ich vaqtda massalar markazining tezligi shu o'q bo'ylab ($v_{Cx} = 0$) nol bo'lsa, massalar markazining *x koordinatasi*

(x_C = const) o'zgarmas bo'ladi. (massalar markazi shu o'q bo'ylab harakatlanmaydi).

Bu tasdiq *y va z o'qlari uchun ham o'rinli bo'ladi.*

Misol: Massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikki kishi m_3 massali qayiqda turipdi. Boshlang'ich paytda qayiq odamlar bilan tinch holatda bo'lgan.

Agarda massasi m_2 bo'lgan odam *a masofa yurib qayiqni old tomoniga o'tsa qayiqni qancha siljishi aniqlansin.*



1.Harakat ob'ekti (qayiq odamlari bilan):

2. Bog'lanishdan ozod qilamiz (suvdan):

3.Bog'lanishni reaktsiya bilan almashtiramiz:

4. Aktiv kuchlarni qo'shamiz:

5. Massalar markazi teoremasini yozamiz:

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{N}$$

x o'qiga proektsiyalaymiz :

$$M\ddot{x}_C = 0. \Rightarrow \dot{x}_C = const = 0. \Rightarrow x_C = const. \Rightarrow \sum m_k x_{k0} = \sum m_k x_k.$$

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_1(x_1 + l) + m_2(x_2 + l + a) + m_3(x_3 + l)$$

$$0 = m_1 l + m_2(l + a) + m_3 l \Rightarrow l = -\frac{m_2 a}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Qayiq qarama-qarshi tomonga qarab l masofaga siljiydi.

Qayiq o'z joyida qo'zg'almas holda qolishi uchun m_1 massali odamni qanday masofaga siljitish kerak:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_1(x_1 + b) + m_2(x_2 + a) + m_3x_3.$$

$$0 = m_1 b + m_2 a. \Rightarrow b = -\frac{m_2}{m_1} a.$$

Kuch impulsi.

Kuch impulsi – o'zaro mexanik ta'sir ulovchi bo'lib berilgan vaqt oralig'ida nuqtaga ta'sir etuvchi kuch tomonidan beriladigan mexanik harakatni xarakterlaydi: $\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$

Uning koordinata o'qlaridagi proektsiyasi: $(x): S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad (y): S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad (z): S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.$

Kuch o'zgarmas bo'lsa: $\bar{S} = \bar{F}(t_2 - t_1).$

Uning koordinata o'qlaridagi proeksiyasi:

$$S_x = X(t_2 - t_1); \qquad S_y = Y(t_2 - t_1); \qquad S_z = Z(t_2 - t_1);$$

Teng ta'sir etuvchi impul's– berilgan vaqt oralig'ida nuqtaga qo'yilgan kuch impul'slarining geometric yig'indisiga teng bo'ladi**:**

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n.$$

dt ga ko'paytiramiz: $\bar{R}dt = \bar{F}_1 dt + \bar{F}_2 dt + ... + \bar{F}_n dt.$

Berilgan vaqt oralig'ida integrallaymiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt + ... + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_n dt. \quad \Rightarrow \quad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + ... + \bar{S}_n.$$

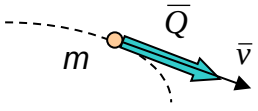
Moddiy nuqta va sistemaning harakat miqdori

Nuqtaning harakat miqdori– nuqta massasini uning tezlik vektoriga ko'paytmasi orqali aniqlanadigan vektor kattalik bo'lib, u mexanik harakat o'lchov birligi hisoblanadi: $\bar{Q} = m\bar{v}.$

Moddiy nuqtalar sistemasining harakat miqdori – moddiy nuqtalar harakat miqdorlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + ... + \bar{Q}_n = \sum \bar{Q}_k.$$

yoki



$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{r}_k).$$

Massalar markazining ta'rifiga ko'ra: $M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.$

U holda: $\bar{Q} = \frac{d}{dt}(M\bar{r}_c) = M\frac{d\bar{r}_C}{dt} = M\bar{v}_C.$

Butun sistema massasini sistema massalar markazining tezlik vektoriga ko'paytmasiga sistema harakat miqdori deyiladi: $\boxed{\bar{Q} = M\bar{v}_C.}$

Sistema harakat miqdori vektorining koordinata o'qlaridagi proektsiyasi:

$$\boxed{Q_x = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{x}_C.}$$

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

n ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan sistemani qaraymiz. Har bir nuqtaga ta'sir etadigan kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz va ularni mos F_{ke} va F_{ki}. *teng ta'sir etuvchilar bilan almashtiraylik. Har bir nuqta uchun* dinamikaning asosiy tenglamasini yozamiz: $m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k.$

$$\boxed{m_k\bar{a}_k = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k} \quad \textbf{yoki}$$

Barcha nuqtalar uchun yozilgan tenglamalarni hadmahad qo'shamiz :

$$\sum m_k\frac{d\bar{v}_k}{dt} = \boxed{\sum \bar{F}^e_k} + \boxed{\sum \bar{F}^i_k}.$$

$\bar{R}^e$ $\quad$ $\bar{R}^i = 0$

Massani tenglamaning chap tomonidagi differentsiyal ostiga kiritamiz va differentsiyal yig'indisini yig'indining differentsiyaliga almashtiramiz :

$$\frac{d}{dt}(\sum m_k\bar{v}_k) = \bar{R}^e. \qquad (18.5)$$

Sistema harakat miqdorining ta'rifiga ko'ra:

$$\sum m_k\bar{v}_k = \bar{Q}.$$

Buni hisobga olsak (18.5) $\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.}$ (18.6)

Demak, sistema harakat miqdori vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosila sistema tashqi kuch bosh vektoriga teng bo'lar ekan. Uning koordinata o'qlaridagi proektsiyasi: $\boxed{\frac{dQ_x}{dt} = R^e_x = \sum X^e_k; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R^e_x = \sum X^e_k; \qquad \frac{dQ_x}{dt} = R^e_x = \sum X^e_k.}$

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan kelib chiqadigan xulosalar (saqlanish qonuni):

1. Agarda $[[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlarning bosh vektori nol $(R_e = 0)$gat eng bo'lsa, u holda harakat miqdor vektori o'zgarmas $(Q = \text{const})$ bo'ladi (sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni).

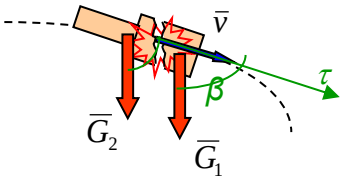
1. Agarda $[[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlari bosh vektorining biror *x o'qidagi proektsiyasi* nol $(R_{xe} = 0)$ gat eng bo'lsa, sistema harakat miqdorining *x o'qdagi pproektsiyasi o'zgarmas* $(Q_x = \text{const})$ bo'ladi.

bu y va z *o'qlari uchun ham o'rinli bo'ladi.*

Misol: v tezilk bilan uchayotgan M massali granata ikki qismga bo'linadi. Ulardan m_1 massali bo'ligining tezligi harakat yo'nalishi bo'yicha v_1 gacha o'sgan bo'lsa ikkinchi bo'lakning tezligi aniqlansin.

1. Harakat ob'ekti (granata):

2. Ob'ekt –erkin sistema, bog'lanishda emas, demak reaktsiya kuchi yo'q.



3. Aktiv kuchlarni qo'shamiz:

4. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani yozamiz:

$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{r}_k).$$

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g \cos\beta + m_2 g \cos\beta \neq 0.$$

τ *o'qqa proektsitalaymiz.*

O'zgaruvchilarga ajratamiz va integrallaymiz :

$$\int_{Q_0}^{Q} dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g \cos\beta + m_2 g \cos\beta)dt \approx 0.$$

O'ng tomondagiintegral amaliy jihatdan nolga teng bo'ladi, chunki portlash vaqti juda $(t<<1)$ kichik.

Bundan saqlanish qonuni : $Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0$ yoki $Q_{\tau 0} \approx Q_\tau$. ⇒

⇒ $Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2$. ⇒ $v_2 = \dfrac{Mv - m_1 v_1}{m_2} v_2$.

Eyler teoremasi-harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani tutash muhit (suv)ni harakatini o'rganishga qo'llash.

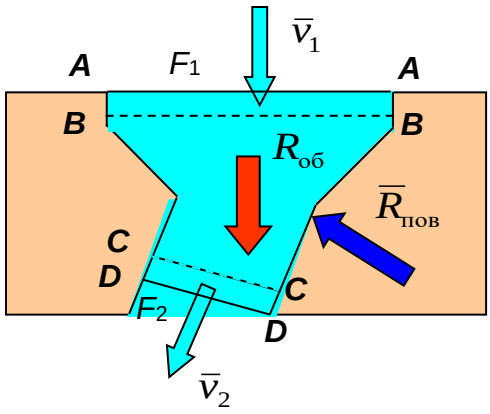
1.Harakat ob'ekti sifatida trubaning egri chiziqli kanalidagi suv hajmini olamiz:

2. Bog'lanishdan ozod qilib, uni reaktsiya kuchi bilan almashtiramiz ($R_{сирт}$ – sirt kuchlarning teng ta'sir etuvchisi)

3. Aktiv kuchlarni qo'shamiz ($R_{хажм}$ – hajmiy kuchlarning teng ta'sir etuvchisi):

4. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani yozamiz:

$$\boxed{\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}_{об} + \overline{R}_{пов}.}$$



t_0 va t_1 vaqt oralig'ida suvning harakat miqdorini quyidagi yig'indi ko'rinishida tasvirlaymiz:

$$\overline{Q}_0 = \overline{Q}_{AB} + \overline{Q}_{BC}. \qquad \overline{Q}_1 = \overline{Q}_{BC} + \overline{Q}_{CD}.$$

[t_0,t_1] vaqt oralig'idagi suv harakat miqdorining o'zgarishi:

$$\Delta\overline{Q} = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \overline{Q}_{CD} - \overline{Q}_{AB}.$$

dt-kichkina vaqt orlag`idagi suv harakat miqdorining o`zgarishi:

$$\boxed{d\overline{Q} = d\overline{Q}_{CD} - d\overline{Q}_{AB}} \qquad d\overline{Q}_{AB} = (M_{сек}dt)\overline{v}_1; \quad d\overline{Q}_{CD} = (M_{сек}dt)\overline{v}_2.$$

Zichlikni, ko'ndalang kesim yuzasi va tezlik ko'paytmalarini bir sekundda oqib o'tuvchi massa deb qabul qilamiz $\boxed{M_{сек} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,}$

U holda:

$$d\overline{Q}_{AB} = (M_{сек}dt)\overline{v}_1; \quad d\overline{Q}_{CD} = (M_{сек}dt)\overline{v}_2. \qquad \boxed{d\overline{Q} = M_{сек}(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)dt.}$$

Sistema harakat miqdori differentsiyalini harakat miqdorining o’zgarishi haqidagi teoremaga qo’ysak, quydagiga ega bo’lamiz

$$M_{\text{сек}}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{R}_{\text{об}} + \bar{R}_{\text{пов}}.$$

Vaqt birligidagi suyuqlik harakat miqdori vektorining geometrik ayirmasi, hajmiy va sirtqi kuchlar bosh vektorlarining yig’indisiga teng bo’ladi.

O’qlardagi proektsiyalari:

$$\begin{aligned}(x): M_{\text{сек}}(v_{2x} - v_{1x}) &= R_x^{\text{об}} + R_x^{\text{пов}};\\ (y): M_{\text{сек}}(v_{2y} - v_{1y}) &= R_y^{\text{об}} + R_y^{\text{пов}};\\ (z): M_{\text{сек}}(v_{2z} - v_{1z}) &= R_z^{\text{об}} + R_z^{\text{пов}}.\end{aligned}$$

Suyuqlikning vaqt birligi ichidagi harakat miqdori vektorining shu o’qlardagi proektsiyalarining ayirmasi, hajmiy va sirtqi kuchlar bosh vektorining shu o’qlardagi proektsiyalarining yig’indisiga teng bo’ladi.

Nazorat savollari

1.Sistema harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasi qanday bo`ladi?

2. Qanday shart bajarilganda moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni o`rinli bo`ladi?

3. Mexanik sistema harakat miqdor (kinetik) momentining hisoblash formulasini yozing.

4. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni qanday bo`ladi?

5. Sistema harakat miqdori teoremasining integral ifodasini yozing.

16-ma`ruza

MAVZU: MODDIY NUQTA VA MEXANIK TIZIM KINETIK ENERGIYASI O`ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA

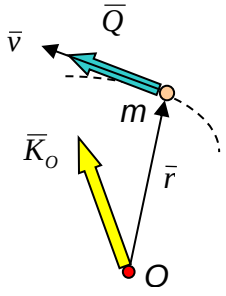
Ma`ruza rejasi:

1. Harakat miqdori momenti haqida tushuncha
2. Sistema harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema
3. Sistema harakat miqdori momentining saqlanish qonuni
4. Kuchning ishi va quvvati haqida tushuncha.
5. Kinetik va potensial energiya. Sistemaning kinetik energiyasi.
6. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema.

Harakat miqdori

Nuqtaning harakat miqdor momenti yoki biror markazga nisbatan harakat kinetik momenti *– moddiy nuqtaning radius-vektorini uning harakat miqdori vektoriga vektor ko'paytmasiga teng bo'lib, u mexanik harakatni o`lchovi hisoblanadi:*

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times \bar{Q} = \bar{r} \times m\bar{v}.$$



Koordinata o'qlardagi proektsiyalar:

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} =$$
$$= [y(mv_z) - z(mv_y)]\bar{i} +$$
$$+ [z(mv_x) - x(mv_z)]\bar{j} +$$
$$+ [x(mv_y) - y(mv_x)]\bar{k}.$$

$$K_x = y(mv_z) - z(mv_y);$$
$$K_y = z(mv_x) - x(mv_z);$$
$$K_z = x(mv_y) - y(mv_x).$$

Sistema moddiy nuqtalari biror O markazga nisbatan kinetic momenti– barcha moddiy nuqtalarining harakat miqdorlaridan shu markazga nisbatan olingan momentlarning geometric yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\bar{K}_O = \bar{K}_{1O} + \bar{K}_{2O} + ... + \bar{K}_{nO} = \sum \bar{K}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i.$$

Ularning mos o'qlardagi proektsiyasi: $K_x = \sum K_{ix}; \quad K_y = \sum K_{iy}; \quad K_z = \sum K_{iy}.$

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

n moddiy nuqtalardan tashkil topgan sistemani qaraymiz. Har bir nuqtaga qo'yilgan kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz va ularni mos $\boldsymbol{F}_{ke}$ va $\boldsymbol{F}_{ki}$ teng ta'sir etuvchilarga ajratamiz. Har bir nuqta uchun dinamika asosiy tenglamasini tuzamiz :

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k$$

yoki

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}^e_k + \bar{F}^i_k.$$

Buning har bir tenglamasini r radius vektorga vektorial ko'paytiramiz:

Barcha nuqtalar uchun yozilgan tenglamalarni hadma-had qo'shamiz :

$$\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}^e_k + \bar{r}_k \times \bar{F}^i_k.$$

Barcha nuqtalar uchun yozilgan tenglamalarni hadma-had qo'shamiz:

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}^e_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}^i_k.$$

$$\bar{M}^e_O \qquad \bar{M}^i_O = 0$$

Differentsiyal vektor ko'paytma tashqarisiga chiqaramiz:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k + \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}.$$

$$\bar{v}_k \times m_k \bar{v}_k = 0 \quad (\sin(\bar{v}_k, m_k \bar{v}_k) = 0)$$

Shnday qilibquyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{M}^e_O.$$

Differentsiyal yig'indini yig'indining differentsiyaliga almashtiramiz:

$$\frac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{M}^e_O.$$

Bunda qavs icidagi ifoda, sistema harakat miqdori momentini ifodalaymiz

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}^e_O.$$

:

Biror markazga nisbatan olingan sistema harakat miqdori momenti vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosili shu markazga nisbatan olingan sistema tashqi kuch bosh momentiga teng bo'ladi.

Uning koordinata o'qlardagi proektsiyalari:

$$\frac{dK_x}{dt} = M^e_x; \quad \frac{dK_y}{dt} = M^e_y; \quad \frac{dK_z}{dt} = M^e_z.$$

Biror o'qqa nisbatan olingan sistema harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosili, shu o'qqa nisbatan olingan sistema tashqi kuch bosh momentiga teng bo'ladi.

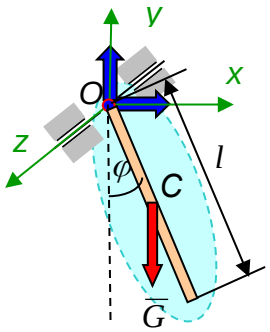
Sistema harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan kelib chiqadigan hulosalar (saqlanish qonuni):

1. Agar $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida sistema tashqi kuchlarining biror-bir markazga nisbatan bosh moment vektori nol $(M_{Oe} = 0)$ gat eng bo'lsa, u holda shu markazga nisbatan olingan sistema harakat miqdor momenti vektori o'zgarmas $(K_O = \text{const})$ bo'ladi – sistema harakat miqdor momentining saqlanish qonuni deyiladi.

2. Agarda biror vaqt $[t_1, t_2]$ oralig'da sistema tashqi kuchlardan biror x o'qiga nisbatan olingan bosh mo menti nolga teng, ya'ni $(M_{xe} = 0)$ bo'lsa, u holda shu o'qqa nisbatan sistema harakat miqdor momenti, o'zgarmas ya'ni $K_x = \text{const}$ bo'ladi.

Huddi shunday tasdiq y *va* z o'qlari uchun ham o'rinli bo'ladi.

Misol: Bir uchi bilan qo'zg'almas aylanish o'qiga osilgan l uzunlikdagi , M massali bir jinsli sterjenning kichik erkin tebranish davri aniqlansin.



$$\boxed{I_z\ddot{\varphi} = M_z = -Mg\frac{l}{2}\sin\varphi.} \quad \text{yoki:} \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mg}{I_z}\frac{l}{2}\sin\varphi = 0.$$

Kichik tebranish hol uchun **$\sin\varphi \approx \varphi$:**

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgl}{2I_z}\varphi = 0 \qquad \text{yoki} \qquad \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

$$k = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_x}}$$

Tebranish davri: $$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{2I_x}{Mgl}}.$$

Sterjenning inertsiya momenti:

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}. \qquad \text{u holda} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.}$$

Kuchning ishi va quvvati.

Kinetik va potensial energiya – mexanik harakat mexanik sistemalar o'zaro ta'sirining natijasi bo'lib bir mexanik sistemadan boshqasiga uzatiladi.

1.Boshqa ko'rinishdagi harakatga aylanmagan hol yoki mexanik Harakat saqlanadi.

3. Moddiy nuqta ko'rinishdagi harakatga aylanadigan hol (potensial energiya, issiqlik, elektr energiya va boshqalar).

Har bir hol o'zining mexanik harakat va mexanik o'zaro ta'sir o'lchoviga ega, ular esa o'z vaqtida Dekard va Leybnits tomonidan kiritilgan (jadvalga qarang):

	Mexanik harakat o'lchovi	Mexanik o'zaro ta'sir o'lchovi
Dekard	Harakat miqdori $\bar{Q} = m\bar{v}$	Kuch impulsi $\bar{S} = \int \bar{F} dt$
Leybnits	Kinetik energiya $T = \frac{mv^2}{2}$	Kuch ishi $A = \int F_\tau ds$

Kuch impul'si - *mexanik harakat o'zgarishidagi kuch ta'sir o'lchovi hisoblanadi.*

Ish esa mexanik harakatni materiyaning boshqa bir shakldagi harakatga o'tkazishning miqdor o'lchovi hisoblanadi.

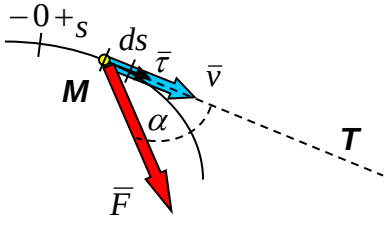
Moddiy nuqtaga qo'yilgan kuch bajargan ishi – *miqdor va yo'nalish bo'yicha o'zgaruvchan kuch qo'yilgan nuqta ixtiyoriy traektoriya bo'ylab harakatlanayotgan* (ko'chayotgan) bo'lsin. Kichik (elementar) ko'chishda kuchni o'zgarmas deb qarash mumkin va bunda kuchning elementar ishi kuchni ko'chish yo'nalishidagi (harakat yraektoriyasiga urinma yo'nalish) proektsiyasini elementar ko'chishga ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$dA = F_\tau ds = F\cos\alpha \cdot ds$$

Elementar ishning ishorasi α burchakning kattaligi va cos α ning ishorasiga bog'liq:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \qquad \delta A > 0;$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \qquad \delta A < 0.$$



Ish ishorasini aniqlash qoydasi:
Agarda kuch va ko'chish yo'nalishi bir hil bo'lsa, (+) ishora olinadi, agarda qarama-qarshi bo'lsa, (–) ishora olinadi.

Elementar ishni ikki vektorning skalyar ko'rinishida ham yozish mumkin:

$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}$ yoki proektsiya ko'rinishida $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Chekli, ya'ni MM_1 kochishda bajarilgan ish yig'indi yoki integrallash yordamida aniqlanadi: $A = \sum dA$

$$A = \int_M^{M_1} F_\tau ds \qquad A = \int_M^{M_1} \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Xususiy hollar:
1. kuch miqdor va yo'nalishi jihatidan o'zgarmas, ya'ni F = const va α =const:

$$A = \int_M^{M_1} F\cos\alpha \cdot ds = F\cos\alpha \int_M^{M_1} ds = Fs\cos\alpha.$$

2. Kuch miqdor jihatdan o'zgarmas va ko'chishga (o'zaro) parallel, ya'ni F = const va α =0: $A = \pm Fs.$

3. **Kuch ko'chishga perpendikulyar:** $A = 0$

Quyidagi teorema va tasdiqlarni isbotlash mumkin:

Ma'lum ko'chishda teng ta'sir etuvchining bajargan ishi, shu ko'chishda tashkil etuvchi kuchlarga bajargan ishlarning yig'indisiga teng boladi:

$A = \sum A_i$ $A = \int_M^{M_1} \overline{R} \cdot d\overline{r} = \int_M^{M_1} (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ...) \cdot d\overline{r} = \int_M^{M_1} \overline{F}_1 \cdot d\overline{r} + \int_M^{M_1} \overline{F}_2 \cdot d\overline{r} + ... = A_1 + A_1 + ... = \sum A_i$

Tutash ko'chishda o'zgarmas kuchning bajargan ishi kattalik va yo'nalish jihatdan shu kuchlarning o'zgarmas kochishda bajargan ishlarning algebrayk yig'indisiga teng bo'ladi :

$A = \sum A_{si}$ $A = \overline{F} \cdot \overline{s} = \overline{F} \cdot (\overline{s}_1 + \overline{s}_2 + ...) = \overline{F} \cdot \overline{s}_1 + \overline{F} \cdot \overline{s}_2 + ... = A_{s1} + A_{s2} + ... = \sum A_{si}$

O'zgarmas sistema ichki kuchlarning bajargan kuchi nolga teng bo'ladi:

$A^i = 0$ $A^i = \int_M^{M_1} (\overline{R} + \overline{R}') \cdot d\overline{r} = \int_M^{M_1} (\overline{R} - \overline{R}) \cdot d\overline{r} = 0; \quad (\overline{R}' = -\overline{R}).$

Og'irlik kuchining bajargan ishi traektoriyaning ko'rinishiga bog'liq emas va og'irliq kuchini balandliklar ayirmasiga ko'paytirilganiga teng:

$$\boxed{A=-G(z_1-z)}$$

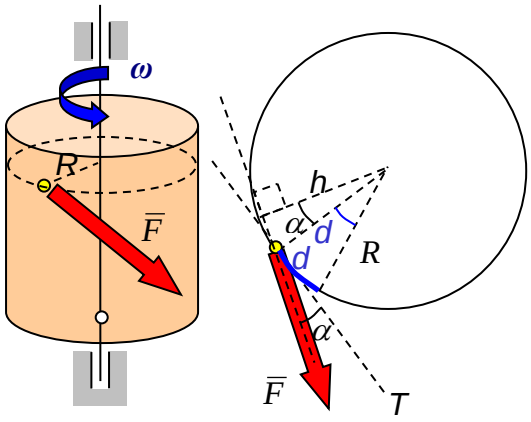
$$A=\int_M^{M_1} G_x dx+G_y dy+G_z dz=\int_M^{M_1}(-G)dz=-Gz\Big|_z^{z_1}=-G(z_1-z);\quad (G_x=G_y=0, G_z=\text{-G})$$

Muvozanat halatdan siljishga (ko'chishda) elastikliki kuchining bajargan ishi:

$$\boxed{A=-c\frac{\Delta x^2}{2}.}$$

$$A=\int_M^{M_1} R_x dx=\int_M^{M_1}(-cx)dx=-c\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x_1}=-c\frac{x_1^2}{2};\quad (R_x=-cx)$$

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jismga qo'yilgan kuchning bajargan ishi



Nuqtaga qo'yilgan kuchning elementar ishi uchun ifoda yozamiz va elementar ko'chishni jismning aylanish burchagi orqali ifodalaymiz.

$$\delta A=F_\tau ds=F\cos\alpha\cdot ds=\boxed{F\cos\alpha\cdot R}\cdot d\varphi$$

$$\delta A=Fh\cdot d\varphi=M_z(\bar{F})d\varphi.$$

Aylanayotgan qattiq jismga qo'yilgan kuchning bajargan ishi, o'qqa qo'yilgan kuch momenti orqali ifodalaymiz.

Aylanayotgan qattiq jismga qo'yilgan kuchning bajargan ishi– chekli aylanish burchagi uchun:

$$\boxed{A=\int_\varphi^{\varphi_1} M_z(\bar{F})d\varphi.}$$

Kuch momenti o'zgarmas bo'lgan holda, kuch momentining aylanish burchagiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi

$$\boxed{A=M_z(\bar{F})(\varphi_1-\varphi).}$$

Quvvat – birlik vaqt ichida bajarilgan ishning miqdorini xarakterlovchi kattalik: $N = \frac{\delta A}{dt}.$

Nuqtaga qo'yilgan kuchning quvvati:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

Aylanayotgan qattiq jismga qo'yilgan kuchning quvvati:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega_z = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$

Kinetik energiya – mexanik energiyani teng miqdorda boshqa turdagi harakatga aylantirishini xarakterlaydi.

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Moddiy nuqtalar sistemasining kinetik energiyasi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi:

$T = \frac{Mv_C^2}{2}$ $\qquad T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{v^2}{2} M = \frac{Mv_C^2}{2}; \qquad (v_1 = v_2 = \ldots = v = v_C)$

Aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi:

$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$ $\qquad T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}; \qquad (I_z = \sum m_k h_k^2)$

Tekis parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi:

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC}) \cdot (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC} + \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}. \quad T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \quad \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

Moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema – *Ma'lum ko'chishdagi nuqta kinrtik energiyasining o'zgarishi, shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning ko'chishdagi bajargan ishiga teng bo'ladi.*

Nuqta dinamikasining asosiy qonunini yozamiz: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$

Tezlanishni tezlik orqali ifodalaymiz va tenglikning o'ng va chap tomonlarini radius-vektor differentsiyaliga skalyar ko'paytiramiz:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r} = \bar{R}\cdot d\bar{r} \quad \text{или} \quad m\bar{v}\cdot d\bar{v} = \bar{R}\cdot d\bar{r}.$$

$$md\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad dA$$

Hosil bo'lgan munosabatlarni ifodalaymiz:

$$\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^{M} dA; \quad \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = A$$

Integrallash chegarasini qo'ygandan keyin: $\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}$

Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema – *Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi, sistemaga qo'yilgan kuchlarni ko'chishda bajargan ishlarining yig'indisiga teng bo'ladi:*

Kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani sistemaning ixtiyoriy nuqtasi uchun yozamiz, buning uchun nuqtaga qo'yilgan kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz: $\boxed{\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{mv_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e.}$

Bu munosabatlarni hadma-had yozamiz :

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{mv_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$$

Tenglikning chap tomonida sistema kinetik energiyalarining ayirmasi hosil bo’ladi:

$$T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0$$

O’zgarmas sistema uchun:

$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$$

Nazorat savollari

1. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni qanday bo`ladi?
2. Ilgarilanma harakatdagi jism kinetik energiyasining hisoblash formulasini yozing.
3. Aylanma harakatdagi jism kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
4. Sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teoremaning integral ko`rinishini yozing.
5. Tekis parallel harakatdagi jism kinetik energiyasi formulasini yozing.
6. Sistema kinetik energiya teoremasining differensial ifodasini yozing.
7. Qattiq jism kinetik energiya teoremasining integral ko`rinishini yozing.
8. Mexanik energiyaning saqlanish qonunini yozing.
9. Qattiq jismning aylanish o`qiga nisbatan kinetik momenti qanday ifodalanadi?
10. Moddiy nuqta kinetik energiya teoremasining differensial va integral

ko`rinishini yozing.

17-MA`RUZA

MAVZU: DALAMBER TAMOILI

Ma`ruza rejasi:

1. Nuqta uchun Dalamber printsipi
2. Mexanik sistema uchun Dalamber printsipi
3. Inertsiya kuchining bosh vektori va bosh momenti.
4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi inertsiya kuchini keltirish.

Dalamber (German, Eyler) *printsipida dinamika tenglamalariga statika tenlamalarining ko'rinishi beriladi.* Bu usul soddaligi sababli, juda ko'p amaliy fanlarga keng qo'lamda foydalanib kelinmoqda.

Moddiy nuqta uchun Dalamber printsipi. Nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasi: $\boxed{m\bar{a} = \sum \bar{P}_i.}$

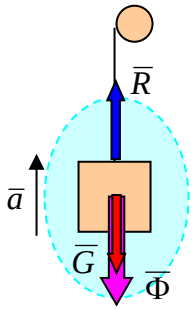
Massa bilan tezlanish ko'paytmasi bo'lgan hadni tenglamaning o'ng tomoniga o'tkazamiz: $0 = \sum \bar{P}_i - m\bar{a}.$

Tenglamaning o'ng tomonida hosil bo'lgan qo'shimcha had miqdori moddiy nuqta massasi bilan tezlanishningko'paytmasiga teng bo'lib, yo'nalishi tezlanish vektoriga teskari bo'lgan vektor inertsiya kuchi deb ataladi va quyidagicha yoziladi: $\boxed{\bar{\Phi} = -m\bar{a}.}$

Inertsiya kuchini kiritishimiz bilan nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasi muvozanat tenglamasi ko'rinishiga keladi:

$$\boxed{\sum \bar{P}_i + \bar{\Phi} = 0.}$$

Shunday qilib, *moddiy nuqtaga tahsir qiluvchi kuchlar har onda inertsiya kuchi bilan muvozanatlashadi***.** Inertsiya kuchi nuqtaga tahsir etuvchi kuchlarga shartli qo'shilib muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini hosil qiladi.



1-misol: Og'irligi *G ga* teng lift kabinasi tros yordamida *a tezlanish bilan ko'tarilmoqda***.** Tros tarangligi aniqlansin.

1. Obhekt (lift kabinasi)tanlaymiz.

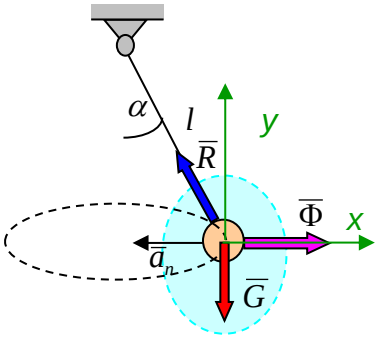
2. Lift kabinasini bog'lanish (tros)dan bo'shatamiz va uni ***R*** reaktsiya kuchi bilan almashtiramiz

3. Tahsir etuvchi kuchlarga inetsiya kuchini qo'shamiz: $\bar{\Phi} = -m\bar{a}.$

4. Muvozanat tenglamasini tuzamiz: $\sum Y_i = 0;\ \ R - G - \Phi = 0.$

Trosning reaktsiyakuchini aniqlaymiz: $$R = G + \Phi = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$

Trosning taranglik kuchini aniqlaymiz: $$\bar{T} = -\bar{R};\ \ T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$



2-misol: Og'irligi *G* bo'lgan yuk uzunligi *l*trosgabog'langanva qandaydir tezlik bilan gorizontal tekislikda aylana troektoriyasi bo'yicha harakatlanmoqda. Tros vertikaldan α burchakka og'ib harakatlanmoqda.

Trosning tarangligi va yukning tezligi aniqlansin.

1. Obhekt (yuk)ni tanlaymiz

2. Yukni bog'lanish (tros)dan bo'shatamiz va uni ***R*** reaktsiya kuchi bilan almashtiramiz.

3. Tahsir etuvchi kuchlarga inetsiya kuchini qo'shamiz:

$$\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n;\ \ \Phi_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{v^2}{l\sin\alpha}.$$

4. Muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$$\sum Y_i = 0;\ \ R\cos\alpha - G = 0.$$
$$\sum X_i = 0;\ \ -R\sin\alpha + \Phi = 0.$$

Birinchi tenglamadan tros revktsiya kuchini aniqlaymiz: $R = \frac{G}{\cos\alpha}.$

Trosni tarangligini aniqlaymiz: $\bar{T} = -\bar{R};\ \ T = R = \frac{G}{\cos\alpha}.$

Tros reaktsiya kuchining qiymatini va inertsiya kuchini ikkinchi tenglamaga qo'yib yukni tezligini aniqlaymiz:

$$-\frac{G}{\cos\alpha}\sin\alpha + \frac{G}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha} = 0. \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.}$$

Erksiz mexanik sistema uchun Dalamber printsipi

n ta nuqtadan iborat mexanik sistemaning k – nuqtasi uchun Dalamber printsipini yozamiz:

$$\boxed{\overline{P}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0.}$$

n ta nuqta uchun n ta tenglamani bir-biri bilan qo'shamiz: $\sum \overline{P}_k + \sum \overline{R}_k + \sum \overline{\Phi}_k = 0.$

Bu yerda $\boldsymbol{P}_k$ *– nuqtaga qo'yilgan (berilgan) kuchlarning teng ta`sir etuvchisi,*

$\boldsymbol{R}_k$*– nuqtaga qo'yilgan bog'lanish reaktsiya kuchlarining teng ta`sir etuvchisi,*

$\boldsymbol{\Phi}_k = -\, m\boldsymbol{a}_k$ *– nuqtaning inersiya kuchi.*

Shunday qilib, *berilgan kuchlarning bosh vektori, bog'lanish reaktsiya kuchi va inertsiya kuchlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'ladi.*

$$\boxed{\overline{P}^* + \overline{R}^* + \overline{\Phi}^* = 0.}$$

Bu yerda $\boldsymbol{P}^*$ *– nuqtaga kuyilgan berilgan kuchlarning bosh vektori,*

$\boldsymbol{R}^*$ *– nuqtaga quyilgan reaktsiya kuchlarining bosh vektori,*

$\boldsymbol{\Phi}^*$*– nuqtalar sistemasi inertsiya kuchlarining bosh vektori.*

Nuqta uchun Dalamber printsipini ifodalovchi tenglamani *O* markazdan nuqtaga o'tkazilgan radius – vektorga ko'paytiramiz:

$$\boxed{\bar{r}_k \times \overline{P}_k + \bar{r}_k \times \overline{R}_k + \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0.}$$

Olingan tenglamani n ta nuqta uchun yozib ularni bir-biri bilan qo'shib quyidagini olamiz:

$$\sum \bar{r}_k \times \overline{P}_k + \sum \bar{r}_k \times \overline{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0.$$

Shundayqilib, moddiy nuqtaga tahsir etuvchi kuchlar, reaktsiya kuchlari va inertsiya kuchlarining ixtiyoriy markazga nisbatan bosh momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng.

Bu yerda $\boldsymbol{M_O}^P$ *–berilgan kuchning O markazga nisbatan bosh momenti,*

$\boldsymbol{M_O}^R$*– bog'lanish reaksiyalarining O markazga nisbatan bosh momenti,*

$\boldsymbol{M_O}^\Phi$*– sistema nuqtasi inersiya kuchining O markazga nisbatan bosh momenti.*

Qattiq jism nuqtasi inersiya kuchini sodda holga keltirish –Dinamikada keltirish markazi uchun sistema massalar markazi qabul qilinadi. Inertsiya kuchlarini massalar markaziga keltirish natijasida shu markazda **inersiya kuchlarining bosh vektori va inersiya kuchlarining markazga nisbatan bosh momenti** hosil bo'ladi:

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{\Phi}^{*}=\sum\bar{\Phi}_k=-\sum m_k\bar{a}_k;\\&\bar{M}_C^{\Phi}=\sum\bar{M}_{iC}^{\Phi}=-\sum\bar{r}_k\times m_k\bar{a}_k.\end{aligned}}$$

Qattiq jism inertsiya kuchining bosh vektori – keltirish markazini tanlashga bog'liq bo'lmaydi va hamma turdagi harakatlar uchun quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{r}_C=\frac{\sum m_k\bar{r}_k;}{M}\ \text{или}\ M\bar{r}_C=\sum m_k\bar{r}_k;\ \Rightarrow\ M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2}=\sum m\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\ \text{или}\ M\bar{a}_C=\sum m_k\bar{a}_k;$$

$$\Rightarrow\quad \bar{\Phi}^{*}=\sum\bar{\Phi}_k=-\sum m_k\bar{a}_k=-M\bar{a}_C;$$

Qattiq jismning ilgarilama harakatida unga tegishli nuqta inertsiya kuchini keltirish

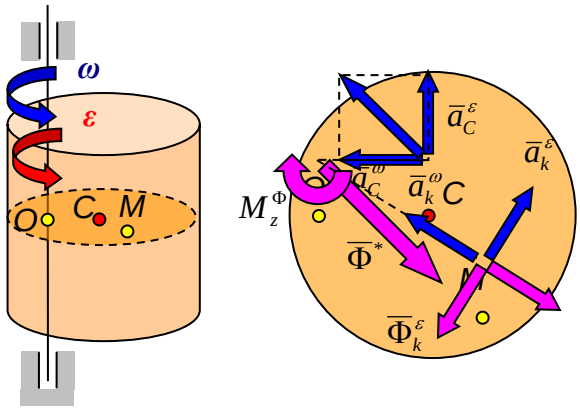
Ilgarilama harakatda, jismning barcha nuqtalarining tezlanishlari bir xil bo'lib, massa markazi S nuqtaning tezlanishiga teng bo'ladi. Qattiq jismning ilgarilama harakatida inertsiya kuchlarining massalar markaziga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'ladi:

$$\bar{M}_C^{\Phi}=\sum\bar{M}_{iC}^{\Phi}=-\sum\bar{r}_k\times m_k\bar{a}_C=-\sum m_k\bar{r}_k\times\bar{a}_C=-M\bar{r}_C\times\bar{a}_C=0;$$

chunki keltirish markazi massalar markazi bilan ustma-ust tushadi va massalar markazi holatini aniqlovchi radius-vektor nnolga aylanadi. SHunday qilib *inertsiya kuchlari, kattaligi buyicha jism massasini massalar markazi tezlanishiga ko'paytirilgan va tezlanishga teskari yo'nalgan, massalar markaziga qo'yilgan teng tahsir etuvchiga keltiriladi.*

Qo’zg’almas o’q atrofida aylanma harakatda bo’lgan qattiq jism nuqtalari inertsiya kuchlarini bir markazga keltirish

Aylanish o’qiga perpendikulyar simmetriya tekisligiga ega bo’lgan jismni qaraylik. Bu holda aylanish o’qi jismning O nuqtasidagi bosh inertsiya o’qi hisoblanadi. Aylanish o’qiga parallel to’g’ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarning tezlanishlari bir –biriga geometrik teng bo’ladi. Shu sababli moddiy simmetrik tekislikka nisbatan simmetrik nuqtalar inertsiya kuchlari bir-biriga teng bo’ladi va ularni teng tahsir etuvchilari ham shu tekislikda (M_x nuqtada) yotadi.



Inersiya kuchining bosh vektori kuyidagiga teng bo’ladi:

$$\boxed{\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.}$$

Massalar markazining tezlanishi: $\bar{a}_C = \bar{a}_C^{\varepsilon} + \bar{a}_C^{\omega}; \quad a_C = OC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Keltirish markazini O nuqtani tanlashda inersiya kuchlarining bosh vektori shu O nuqtaga qo’yilgan va masslar markazi tezlanishiga parallel hamda teskari yo’nalgan bo’lishi kerak: $\bar{a}_k = \bar{a}_k^{\varepsilon} + \bar{a}_k^{\omega}; \quad a_k^{\varepsilon} = \varepsilon OM_k, a_k^{\omega} = \omega^2 OM_k$

Ixtiyoriy M_k nuqtaning tezlanishi:

Markazga intilma inertsiya kuchining tahsir chiziqlari aylanish markazidan o’tganligi sababli inertsiya kuchining bosh momenti faqat aylantirma kuch inersiya momenlari yig’indisi ko’rinishida hisoblanadi:

$$M_O^{\Phi} = -\sum \Phi_k^{\varepsilon} OM_k = -\sum m_k \varepsilon OM_k^2 = -\varepsilon \sum m_k OM_k^2 = -I_z \varepsilon.$$

Inersiya kuchining bosh momenti burchak tezlanishni jismning aylanish o’qiga nisbatan jism inersiya momentiga ko’paytmasiga teng bo’lib burchak tezlanish yo’nalishiga karama-qarshi yo’nalgandir:

Shunday qilib, inertsiya kuchi inertsiya kuchlarining bosh vektori va bosh momentiga keltiriladi. $M_z^{\Phi} = -I_z\varepsilon.$

Statikadagi kabi kuch va juftni yangi keltirish markazga qo'yilgan bitta teng ta`sir etuvchi kuch bilan almashtirish mumkin. Inersiya kuchining teng ta`sir etuvchisini tebranish markaziga qo'yilganligini ko'rsatish mumkin. Xususiy holda, agar massalar markazi aylanish o'qida yotgan bo'lsa inersiya kuchining yuosh vektori nolga aylanadi va inersiya kuchi juftga keltiriladi**:**

$\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C = 0.$ $M_z^{\Phi} = -I_{zC}\varepsilon.$

Nazorat savollari

1.Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi qanday bo`ladi?

2.Moddiy nuqtaning inersiya kuchining yo`nalishi va kattaligi qanday?

3.Tekis to`g`ri yo`lda tormozlangan temir yo`l vagonining inersiya kuchi qanday (harakat yo`nalishadimi yoki unga qarshimi) yo`naladi?

4.Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi nimadan iborat?

18- MA`RUZA

MAVZU: ANALITIK MEXANIKA ELEMENTLARI

Ma`ruza rejasi:

1. Analitik mexanika predmeti
2. Bog'lanishlar
3. Bog'lanishlarning klassifikasiyasi
4. Mumkin bo'lgan ko'chish
5. Ideal bog'lanish

Tayanch so'zlari va iboralari: *Bog'lanish, erkin sistema, geometrik bog'lanish, kinematik bog'lanish, golonomli bog'lanish, begolonom bog'lanish, stasionar bog'lanish, stasionar bo'lmagan bog'lanish, bo'shatadigan bog'lanish, bo'shatmaydigan bog'lanish, mumkin bo'lgan ko'chish, xaqiqiy ko'chish, kuchning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishi, ideal bog'lanish.*

Umumlashgan koordinatalar, sistemaning erkinlik darajasi, qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma xarakati, qattiq jismning tekis parallel xarakati, umumlashgan kuchlar.

Analitik mexanikadan boshlang'ich ma`lumotlar

Analitik mexanika bo'limida barcha mexanik sistemalarning xarakati va muvozanatigaoid umumiy prinsiplar baen etiladi. Bu prinsiplardan mexanik sistemaning asosiy differensial tenglamalarini chiqarish, bu tenglamalarni talqin qilish va integrallash masalalari analitik mexanikani asosiy mazmunini tashkil qiladi. Analitik mexanika bo'limida qo'llaniladigan usullarni mexanik sistemalardan tashqari elektrik valektromexanik xodisalarga ham qo'llash mumkin.

Statika bo'limida absolyut qattiq jism muvozanatining zaruriy va etarli shartlari chiqarilgan edi. Qotish prinsipiga asosan istalgan mexanik sistema uchun bu shartlar faqat zaruriy shartlarni ifodalaydi. Muvozanatni etarli shartini aniqlash

uchun xar bir jismning muvozanatini ayrim tekshirish kerak. Bunda no`malum bo'lgan bir qancha ichki bog'lanishlarning reaksiya kuchlarini xisoblashga.to'g'ri keladi. Sistemani tashkil qiluvchi jismlar soni ortib borgan sari tenglamalar soni ortib boradi.

Analitik mexanikada barcha mexanik sistemalar uchun umumiy bo'lgan prinsiplar asosidaanalitik usulda sistemaning xarakat differensial tenglamalari yoki muvozanat tenglamalari chiqariladi.

Bog'lanishlar

Ixtiyoriy aktiv kuchlar ta`siridagi N ta nuqtadan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalarining koordinatalari, tezliklari va tezlanishlari sistemaning xarakati davomida ma`lum shartlarni qanoatlantirsin. Bunday shartlarga sistemaga qo'yilgan **bog'lanishlar** deyiladi. Bog'lanishlar biror koordinatalar sistemasiga nisbatan sistema nuqtalarining koordinatalari $(x_к, y_к, z_k)(k=1,..,N)$,ulardan vaqt bo'yichaolingan birinchi tartibli xosilalari $(\dot{x}_к, \dot{y}_к, \dot{z}_к)$ orasidagi ma`lum munosabat bilan ifodalanadi. Bu munosabatlarga vaqt toshkor ravishda qatnashishi mumkin.

Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlarni ifodalovchi munosabatlar tenglamalar yoki tengsizliklardan iborat bo'lishi mumkin. ***Bog'lanishlar qo'yilmagan sistemagaerkin sistema deyiladi.*** Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlar aktiv kuchlar ta`siridagi sistema nuqtalarining xarakatini, xuddi Shu kuchlar ta`siridagi erkin sistema nuqtalarining xarakatiga nisbatan ma`lum ma`noda cheklaydi.

Bunday cheklashlardan texnikaning turli soxalarida praktika uchun zarur bo'lgan, maqsadga muvofiq biror yo'nalish bo'yichaxarakatni ta`minlashda foydalaniladi. Dvigatel ichida harakatlanayotgan porshen bunga misol bo'laoladi. Bunda silindr bog'lanish vazifasini o'taydi.

Bog’lanishlarning klassifikasiyasi

Sistema nuqtalariga qo’yilgan bog’lanishlarning xarakteriga qarab, sistema nuqtalari turlichaxarakatdabo’ladi. Bog’lanishlarni turli xillarini ko’rib chiqamiz.

Bog’lanishlar faqat sistema nuqtalarining koordinatalarini cheklasa, bunday bog’lanishlar ***geometrik bog’lanishlar*** deyiladi. Geometrik bog’lanishlarning tenglamasi

$$f(x, y, z,..., x_N, y_N, z_N t) = 0$$

yoki qisqacha

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \qquad (1)$$

ko’rinishda yoziladi. Bu erda va kelgusida $f(x_k, y_k, z_k)$ funksiyasi va uning xosilalari uzluksiz funksiya deb qaraladi.

Agar bog’lanish sistema nuqtalarining koordinatalaridan tashqari tezligini xam cheklasa, bunday bog’lanish***kinematik yoki differensialli bog’lanish*** deyiladi. Kinematik bog’lanishning tenglamasi quyidagicha bo’ladi.

$$f(x_k, y_k z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0 \qquad (2)$$

Agar bu tenglama integrallanadigan bo’lsa, bunday bog’lanishga ***golonomli bog’lanish,*** integrallanmaydigan bo’lsa, ***begolonom bog’lanish***deyiladi.

Agar bog’lanish tenglamasi vaqtga oshkor ravishda bog’liq bo’lsa, bunday bog’lanishga***stasionar bo’lmagan bog’lanish*** deyiladi Bunday bog’lanish tenglamasi

$$f(x_k, y_k z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Masalan, $\frac{x^2}{a^2 t^2} + \frac{y^2}{в^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

tenglama bilan ifodalangan bog’lanish stasionar bo’lmagan bog’lanishdan iborat bo’ladi. Uning geometrik ma`nosi quyidagichadir: nuqta xarakat davomida bitga yarim uki uzgarib turadigan ellipsoid sirtida qoladi.

Agar bog’lanish tenglamasi vaqtga oshkor ravishda bog’liq bo’lmasa, bunday bog’lanish***stasionar bog’lanish*** deyiladi. Stasionar bog’lanishning tenglamasi

$$f(x_k, y_k z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = 0 \qquad (3)$$

Bog’lanishni ifodalaydigan munosabat tenglama bilan ifodalanadigan bog’lanishga***ikki tomonlama yoki bo’shatmaydigan bog’lanish*** deyiladi.

$$f(x_k, y_k z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = 0$$

Bog’lanishni ifodalaydigan munosabat tengsizlik bilan ifodalanadigan bog’lanishga***bir tomonlama yoki bo’shatadigan bog’lanish*** deyiladi. Uning tenglamasi quyidagicha bo’ladi.

$$f(x_k, y_k z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) \le 0$$

MUMKIN BO’LGAN KO’CHISH.

Nuqtaga $f(x, y, z) = 0$ qo’yilgan bog’lanishni berilgan onda qanoatlantiruvchi mazkur nuqtaning xar qanday tasavvur qilinadigan cheksiz kichik ko’chishiga***mumkin bo’lgan ko’chish yoki virtual ko’chish*** deyiladi.

Nuqtaning mumkin bo’lgan ko’chishi $\delta\bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ bilan belgilanadi.

Bog’lanishni qanoatlantirgan xolda nuqtaning fazodadt vaqt ichidaelementar ko’chishiga h***aqiqiy ko’chish*** deyiladi. Haqiqiy ko’chishi $d\bar{r}(dx, dy, dz)$ bilan belgilanadi.

Agar nuqtaga $f(x, y, z) = 0$ bog’lanish qo’yilgan bo’lsa, u xolda M nuqtaning dt vaqt ichidagn xaqiqiy ko’chishi $d\bar{r}$, Shu paytda traektoriyaga urinma bo’ylab yo’naladi . Nuqtaning xaqiqiy ko’chishi nuqtaga ta`sir etuvchi kuchlarga, unga qo’yilgan bog’lanishga va boshlang’ich shartlarga bog’liq bo’ladi. Nuqtaning mumkin bo’lgan ko’chishi bilan xaqiqiy ko’chishi orasidagi munosabatni aniqlaymiz. Agar nuqtaga stasionar bog’lanish qo’yilgan bo’lsa, u xolda nuqtaning xar bir xaqiqiy ko’chishi birorta mumkin bo’lgan ko’chish bilan ustma - ust tushadi. Stasionar bo’lmagan bog’lanishlar qo’yilgan nuqtaning xaqiqiy ko’chishi birortaxam mumkin bo’lgan ko’chish bilan ustma - ust tushmasligi mumkin.

Umumlashgan koordinatalar va sistemaning erkinlik darajasi

Mexanik sistemaning istalgan paytdagi xolati sistema xar bir nuqtasining koordinatalari bilan aniqlanadi.

Mexanik sistema N ta nuqtadan tashkil topgan bo'lsin.U xolda bunday sistemaning xolatini aniqlash uchun 3N ta Dekart koordinatalari $x_1, x_2, ..., x_N$, $y_1, y_2, ... y_N$, $z_1, z_2, .. z_N$ ni bilish etarli. Agar mexanik sistema cheksiz ko'p nuqtalar to'plamidan tashkil topgan bo'lsa, u xolda bunday sistemaning xolatini uning koordinatalari vositasida Chekli ravishda aniqlab bo'lmaydi. Lekin kup xollarda mexanik sistemaning xolatini bir-biriga bog'liq bo'lmagan ma`lum sondagi parametrlarbilan aniqlashmumkin. Masalan, birormurakkabmashina yokimexanizmning xolatini aniqlashuchunbitta yokiikkita etakchi bo'g'inining xolatini bilish etarli, Chunki boshqa bo'g'inlarning xolatini etakchi bo'g'in holati orqali aniqlash mumkin.

Analitik mexanikada mexanik sistemaning harakatini o'rganish uchun «umumlashgan koordinatalar» tushunchasi kiritiladi.

UMUMLASHGAN KUCHLAR

Sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisi

$$\sum \delta A_R = \sum \bar{F}_R \cdot \delta \bar{r}_R \qquad (6)$$

formuladan aniqlanadi. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum \delta A_R = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_R \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_R}{\partial q_i} \delta q ,$$

yoki yig'indilarning tartibini o'zgartirsak,

$$\sum \delta A_R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_R \frac{\partial \bar{r}_R}{\partial q_i} \delta q$$

bo'ladi. Bu tenglikda ushbu belgilarni kiritamiz:

$$Q_i = \sum_{R=1}^{N} \bar{F}_R \cdot \frac{\partial \bar{r}_R}{\partial q_i} \cdot \qquad (7)$$

u holda

$$\sum \delta A_R = \sum_{R=1}^{n} Q_i \delta q_i = Q_i \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n \qquad (8)$$

bo'ladi.

Q_i kattalik umumlashgan koordinata q_i ga mos keluvchi *umumlashgan kuch* deyiladi. Boshqacha aytganda, ***berilgan mexanik sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin buklgan ko'chishdagi elementar ishlari yig'indisidagi biror umumlashgan koordinataning orttirmasi oldidagi koeffisient sistemaning ushbu umumlashgan koordinatasiga mos keluvchi umumlashgan kuchni ifodalaydi***. Bu, umumlashgan kuchni aniqlashning birinchi usulidir.

Umumlashgan kuchni xisoblashda quyidagi ikkinchi usuldan xam foydalaniladi. Bunda Q_i umumlashgan kuchni xisoblash uchun mumkin bo'lgan ko'chishlar Shunday tanlanadiki, faqat Q_i ga mos kelgan umumlashgan koordinata q_i o'zgarsin, ya`ni $\delta q_i \neq 0$ bo'lib, qolgan barcha δq_i, ..., $\delta q_{i-1} \delta q_{i=+1}$,... δq_n lar nolga teng deb qaraladi.

Barcha kuchlarning bunday xususiy ko'chishdagi ishlarining yig'indisini $(\sum \delta A_R)_i$, bilan belgilasak, uning miqdori (24.25) ga ko'ra bitta qo'shiluvchi bilan ifodalanadi:

$$\left(\sum \delta A_\kappa\right)_i = Q_i \delta q_i \qquad (9)$$

Bundan

$$Q_i = \frac{\left(\sum \delta A_R\right)_i}{\delta q_i} \cdot$$

Nixoyat, uchinchi usulda, berilgan indeksli umumlashgan kuch (7) ga asosan

$$Q_i = \sum_{R=1}^{N}\left(X_R \frac{\partial x_R}{\partial q_i} + Y_R \frac{\partial y_R}{\partial q_i} + Z_R \frac{\partial z_R}{\partial q_i} \right), (i = 1,2,...,n) \qquad (10)$$

formula yordamida analitik usulda xisoblanadi.

Umumlashgan kuch Q_i ning umumlashgan koordinata orttirmasi δq_i ga ko'paytmasi ishni ifodalaganligi tufayli

$$[Q] = \frac{[A]}{q}$$

bo'ladi. Binobarin, ***umumlashgan kuchning o'lchovi umumlashgan koordinataning o'lchoviga bog'liq bo'ladi.*** Agar umumlashgan koordinata uzunlik o'lchoviga ega bo'lsa, u xolda umumlashgan kuchni kuch birligida (Nyutonda)o'lchanadi, agar umumlashgan koordinata uchun burchak olinsa, umumlashgan kuchning birligi kuch momentining o'lchov birligida (N·m) bo'ladi.

KUCHNING MUMKIN BO'LGAN KO'CHISHDAGI ISHII IDEAL BOG'LANISHLAR

Analitik mexanikada mexanik sistemaning xarakat iyoki muvozanatini tekshirishda muxim axamiyatga ega bo'lganyana bitta tushuncha – kuchning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishi kiritiladi. Kuchning mumkin bo'lgan $\delta \bar{r}$ ko'chishidagi elementar ishi δA quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$\delta A = (\bar{F} \cdot \delta \bar{r})$$

yoki

$$\delta A = X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z$$

Bunda X,U, Z lar $\bar{F}$ - kuchining, $\delta x, \delta y, \delta z$ lar esa $\delta \bar{r}$ mumkin bo'lgan ko'chishining Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini ifodalaydi.

Kuchning mumkin bo'lgan ko'chishidagi ishi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin

$$\delta A = \left|\bar{F}\right| \cdot \left|\delta \bar{r}\right| \cdot \cos\alpha$$

bunda $\alpha - \overline{F}$ kuchi bilan $\delta \bar{r}$ mumkin bo'lgan ko'chish vektorlari orasidagi burchak. Yuqorida keltirilgan formulalar sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchlari uchun xam o'rinlidir.

Agar sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchlarining sistemaning xar qanday mumkin bo'lgan ko'chishidagi ishlari yig'indisi aynan nolga teng bo'lsa, bunday bog'lanishlar**ideal bog'lanishlar** deyiladi:

$$\sum(\overline{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k) = 0$$

bunda $\overline{N}_k$ - bog'lanish reaksiya kuchlari, $\delta \bar{r}_k$ - mumkin bo'lgan ko'chish.

MUMKIN BO'LGAN KO'CHISH PRINSIPI

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi berilgan kuchlar ta`siridagi ma`lum bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning muvozanat shartini ifodalaydi:

Aktiv kuchlar ta`siridagi ideal, bo'shatmaydigan va stasionar bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistema biror inersial xisoblash sistemasiga nisbatan muvozanatda bo'lishi uchun sistemaning ko'zda tutilgan muvozanat xolatidan xar qanday mumkin bo'lgan ko'chishida barcha aktiv kuchlar elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir. Ya`ni

$$\sum \delta A_k = \sum(\overline{F} \delta \bar{r}_k) = 0 \qquad (1)$$

DALAMBER-LAGRANJ TAMOILI. DINAMIKANING UMUMIY TENGLAMASI

Dinamikaning umumiy tenglamasi (Dalamber-Lagranj prinsipi)

Teorema. *Agar xarakatdagi mexanik sistema nuqtalariga ideal vabo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u xolda sistema nuqtalariga ta`sir etuvchi aktiv kuchlarning xamda inersiya kuchlarining xar qanday mumkin bulan ko'chishdagi elementar ishlarining yig'indisi xar onda 0 teng bo'ladi,* ya`ni:

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\ \bar{r}_k = 0 \qquad (1)$$

Isbot. Agar $\overline{F}_k$ aktiv kuchlar va $\overline{N}_k$ ideal bog'lanish reaksiya kuchlari ta`siridaxarakatlanayotgan mexanik sistema nuqtalariga mos ravishda $\overline{\Phi}_k$ inersiya kuchlarini qo'ysak, u xolda Dalamber prinsipiga ko'ra bu kuchlarning geometrik yig'indisi xar onda 0 teng bo'ladi:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k = 0 \qquad (k = 1, \overline{N}) \qquad (2)$$

Sistema nuqtalariga ixtieriy mumkin bo'lgan ko'chish beramiz va (2} tenglamalarning xar birini mos nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta\bar{r}_k$ ga skalyar ko'paytiramiz; olingan ifodalarni xadlab qo'shib quyidagi tenglamani olamiz:

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\cdot\delta\bar{r}_k = 0 \qquad (3)$$

Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lgani uchun $\sum\overline{N}_k\cdot\delta\bar{r}_k = 0$

Shu sababli (3) dan isbot kilinishi zarur bo'lgan (1) tenglamani xosil qilamiz:

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\cdot\delta\bar{r}_k = 0$$

Bu tenglama **dinamikaning umumiy tenglamasi** deyiladi. Ushbu tenglama Dalamber prinsipi bilan Lagranjning mumkin bo'lgan ko'chish prinsiplarining majmuasidan iborat.

Shuning uchun bu prinsip **Dalamber- Lagranj prinsipi** deyiladi (1)ni Dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyalari orqali ifodalasak

$$\sum(X_k - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (Y_k - m_k\ddot{y}_k)\ \delta y_k + (Z_k - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k = 0 \quad (4)$$

xosil bo'ladi.

(4) tenglamadan foydalanib mexanik sistemaxarakatining differensial tenglamalarini chiqarish mumkin.

Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari.

Ideal, golonom va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistema xarakatining umumlashgan koordinatalardagi differensial tenglamasini o'rganishga o'tamiz. Mustakil umumlashgan koordinatalardagi tenglamalar *Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari*,ba`zan, shundaygina Lagranj tenglamalari (Chunki uning birinchi tur tenglamalari deyarli ishlatilmaydi) deyiladi. Shunday qilib, ***Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari erkinmas mexanik sistema xarakatining differensial tenglamalaridan iborat.***

Erkinlik darajasi s-ga teng mexanik sistema n-ta nuqtadan tashkil topib, unga ideal, golonom, va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin. U xolda, sistemaning fazodagi xolati s-ta umumlashgan koordinatalar $q_1,q_2,\ldots,q_s$ bilan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Mexanik sistemaning xar qanday k-nchi nuqtasining radius vektori $r_k=r_k(t,q_1,\ldots q_s)$; ($k=\overline{1,n}$). Masalan, bog'lanishlar stasionar bo'lganda ushbu nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi nuqtaning radius vektorining variasiasi kabi aniqlanadi. Nuqtalarning tezliklari

$$v_k=\dot{r}=\frac{\partial r_k}{\partial t}+\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\cdot\dot{q}_j,\ (k=\overline{1,n}) \qquad (5)$$

Bu erda $\dot{q}_j$ - umumlashgan tezlik. Agar bog'lanishlar stasionar bo'lsa birinchi xad nolga aylanadi. Nuqtalarning tezliklari umumlashgan tezliklarning chiziqli funksiyasi ekan, chunonchi, k-nchi nuqtaning tezligidan $\dot{q}_j$ bo'yicha xususiy xosila:

$$\frac{\partial v_k}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\dot{r}_k}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial r_k}{\partial q_j} \qquad (6)$$

ga teng.

Vaqt bo'yicha to'la differensial olish va umumlashgan koordinata bo'yicha xususiy differensial olish amallarining o'rnini o'zaro almashtirish mumkin bo'lganligi sababli

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial r_k}{\partial q_j}) = \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{dr_k}{dt}) = \frac{\partial v_k}{\partial q_j} \cdot \qquad (7)$$

Mexanik sistema xarakati bilan bog'liq masalalarni dinamikaning umumiy tenglamasini bevosita qo'llash bilan yechish mumkinligini Yuqorida ko'rib chiqqan edik. Ammo, (3) dagi umumlashgan inersiya kuchni sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalasak, sistemaning xarakat tenglamasini tuzish ancha osonlashadi.

Mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining inersiya kuchi

$$F_k^u = -m_k a_k = -m_k \frac{dv_k}{dt}$$

ga teng va q_j umumlashgan koordinataga tegishli Q^i_j umumlashgan inersiya kuchi quyidagicha aniqlanadi:

$$-Q_j^u = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} m_k [\frac{d}{dt}(v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j}) - v_k \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial r_k}{\partial q_j})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k [\frac{d}{dt}(v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} - v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial r_k}{\partial \dot{q}_j}(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Bu erda

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$$

mexanik sistemaning kinetik energiyasi. Demak, umumlashgan inersiya kuchi

$$-Q_j^u = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Umumlashgan inersiya kuchining ushbu ifodasini dinamikaning umumiy tenglamasi (3) ga qo'yib va umumlashgan aktiv kuchni tenglamaning o'ng tomoniga ko'chirib,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{j,}\ (j = \overline{1,s}) \qquad (8)$$

tenglamaga kelamiz. ***(8) Langrajning ikkinchi tur tenglamalari*** *deyiladi*. (8) dan ko'ramizki bu tenglamalar ideal, golonom va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi tenglamasidir. Ushbu tenglamalar soni mexanik sistema erkinlik darajasi (umumlashgan koordinatalar) soniga teng. Matematik nuqtai nazardan, (8) vaqtning funksiyasi kabi izlanayotgan s-ta mustakil umumlashgan koordinatalarning ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalari sistemasidan iborat.

Tekshirish uchun savollar

1. Analitik mexanika nimani o'rgatadi?
2. Qanday sistemaerkin deyiladi?
3. Stasionar bog'lanishga ta`rif bering
4. Umumlashgan koordinatalarni ta`riflang
5. Qattiq jismni tekis parallel xarakatida umumlashgan koordinatalar nechta?
6. Sistemaning erkinlik darajasi nimaga teng?
7. Fazoda qattiq jismning erkinlik darajasi nimaga teng?
8. Krivoship-polzunli mexanizmning erkinlik darajasi nimaga teng?
9. Umumlashgan kuchni ta`riflang
10. Umumlashgan kuchni topishning 3 usulini keltiring
11. Umumlashgan kuchning birligi qanday?