МИНИСТЕРСТВО ГОРНО-ДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ГЕОЛОГИИ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ

к выполнению практических работ по предмету

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

для студентов направлений бакалавриата «Технология машиностроения оборудования и автоматизация машиностроительных производств», «Горная электромеханика», «Горное дело», «ППП Горное дело», «Автоматизация и управление», «Электроэнергетика», «Металлургия»

Каюмов Б.Б.

Навоий - 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Объектами всех рассмотренных задач являются реальные механизмы и механические системы, используемые вгорном деле. В отдельных случаях с целью упрощения поставленной задачи и уменьшения объема математическихопераций, необходимых для ее решения, вместо сложногореального механизма рассматривается несколько упрощенная механическая система, геометрически и кинематическиему подобная. В методике решения задач нашли отражениерезультаты фундаментальных научных исследований, выполненных выдающимися учеными-педагогами горнякамипроф. И.М. Воронковым, проф. В.М. Осецким, проф. Л.Б.Левенсоном, проф. Н.Ф. Руденко и др. и руководимымиими научно-педагогическими коллективами, а также опытпроектных и научно-исследовательских учреждений горного профиля, родственных кафедр вузов нашей страны и рядазарубежных стран, в частности России, Германии, Польши, Венгрии, Китая.

Тематическая направленность рассмотренных задач позволяет осуществить специализацию курса «Теоретическаямеханика» и проиллюстрировать возможность использования методов общетеоретических учебных дисциплин длярешения конкретных инженерных задач. Таким образом,показан путь перехода от абстрактных научных положенийк практической деятельности инженера и исследователя.

Будучи адресовано студентам и специалистам в областигорного производства, данное методическое указание может бытьиспользовано при подготовке бакалавров другого профиля,так как многие из рассмотренных машин и механизмов нередко применяются в самых разнообразных отраслях техники и технологии.

За основу приняты материалы, содержащиеся в книге «Сборник задач по теоретической механике на примерах из горной техники и технологии (В.С. Перевалов, Г.А. Доброборский, Л. М.Лянсберг и др.; Под общ. ред. В.С. Перевалова. - М.: Издательство МГГУ, 2000).

СТАТИКА

Практическая работа №1
РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Сходящимися называются силы, линии действиякоторых пересекаются в одной точке. Система сходящихсясил имеет равнодействующую, равную главному векторуэтих сил, т.е. их геометрической сумме, и приложенную вточке пересечения линий их действия.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо идостаточно, чтобы главный вектор этих сил был равеннулю:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0.$$

Геометрически условие равновесия рассматриваемойсистемы выражается в том, что силовой многоугольник,построенный из векторов сил этой системы, являетсязамкнутым.

В проекциях на оси прямоугольной системы координатимеем

$$\sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \quad \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \quad \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0.$$

Для плоской системы сходящихся сил, когда линиидействия всех сил системы лежат в одной плоскости,получаем

$$\sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \quad \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0.$$

Если твердое тело находится в равновесии поддействием трех непараллельных сил, лежащих в однойплоскости, то линии действия этих сил пересекаются водной точке.

1.1. Всасывающий патрубок рабочего органа земснаряда(рис. 1.1,а) подвешен на канате, намотанном на барабан лебедкиD и огибающем блок А. Блок установлен на штанге АВ,шарнирно закрепленной в точке В и удерживаемой оттяжкой АЕ.Определить усилия в штанге и оттяжке, если натяжение канатаравно 0,4 кН; массой штанги и размерами блока А пренебречь.

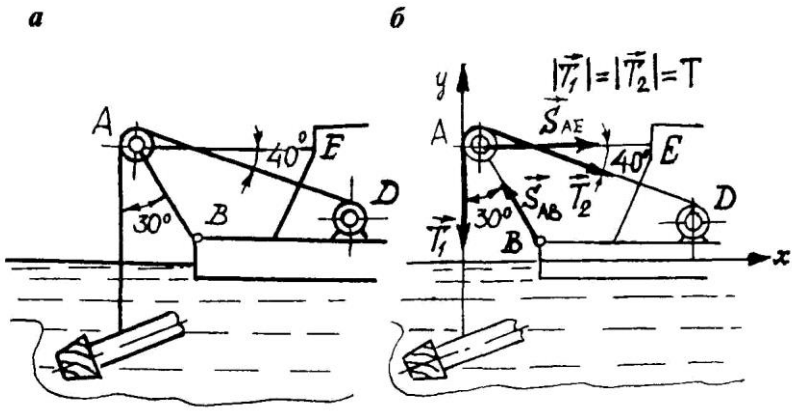


Рис. 1.1

Решение. Поскольку размерами блока пренебрегаем, томожно считать, что он находится в равновесии под действиемплоской системы четырех сходящихся сил

(рис. 1.1,б): натяжения Ткаждой из двух ветвей каната и усилий S_{AB}в штанге иS_{AE}в оттяжке, причём заранее можно сделать вывод, что штангасжата, а усилие S_{AB} направлено к блоку.

Условия равновесия системы:

$$\sum X_k = S_{AE} + T\cos 40° - S_{AB}\sin 30° = 0;$$
$$\sum Y_k = -T + S_{AB}\cos 30° - T\sin 40° = 0,$$

откуда

$$S_{AB} = T(1 + \sin 40°) / \cos 30° =$$
$$= 0{,}4\,(1 + \sin 40°) / \cos 30° = 0{,}759 \quad \text{кН};$$
$$S_{AE} = S_{AB}\sin 30° - T\cos 40° = T\,[(1 + \sin 40°)\,\mathrm{tg}\,30° - \cos 40°] =$$
$$= 0{,}4\,[(1 + \sin 40°)\,\mathrm{tg}\,30° - \cos 40°] = 0{,}073 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_{AB} \approx 0{,}76$ кН; $S_{AE} = 0{,}073$ кН.

1.2. Фонарь 1 (рис. 1.2,а) системы освещения рабочегоуступа карьера укреплен на переносной опоре 2 с помощьюгоризонтальной поперечины АС и подкоса ВС. Найти усилия S_1иS_2 соответственно в поперечине и подкосе, если масса фонаря m=53,7 кг; l_{AC}=0,85 м; l_{BC}=1,0 м; крепления в точках А, В и С -шарнирные.

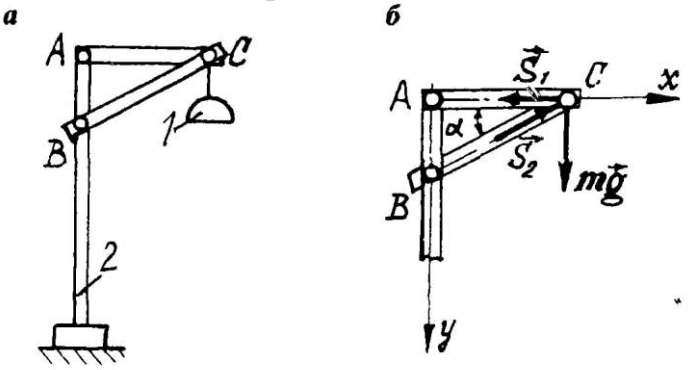


Рис. 1.2

Решение. Рассмотрим равновесие узла С, на которыйдействуют сила тяжести mg, искомые усилия S_1(в поперечине)и S_2(в подкосе). Все силы лежат в одной плоскости и пересекаются в точке С (рис. 1.2, б).

Уравнения равновесия этой сходящейся системы сил имеютследующий вид:

$$\sum X_k = -S_1 + S_2\cos\alpha = 0;$$
$$\sum Y_k = mg - S_2\sin\alpha.$$

Из треугольника АВС находим

$$\cos\alpha = \frac{l_{AC}}{l_{BC}} = 0{,}85;$$
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}85^2} = 0{,}5268.$$

Решая систему уравнений равновесия, получим

$$S_2 = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{53{,}7 \cdot 9{,}81}{0{,}5268} \approx 1000 \text{ Н};$$
$$S_1 = S_2\cos\alpha = 1000 \cdot 0{,}85 = 850 \text{ Н}.$$

Ответ: $S_1 = 850$ Н; $S_2 \approx 1000$ Н.

1.3. Фонарь 1 (рис. 1.3,а) системы освещения участкакарьера подвешен к переносной опоре 2 на шнуре АС и притянутк столбу опоры тросом ВС. Масса фонаря m=51 кг; α=60°;β=120°. Определить натяжение шнура S_{AC}и троса S_{BC}.

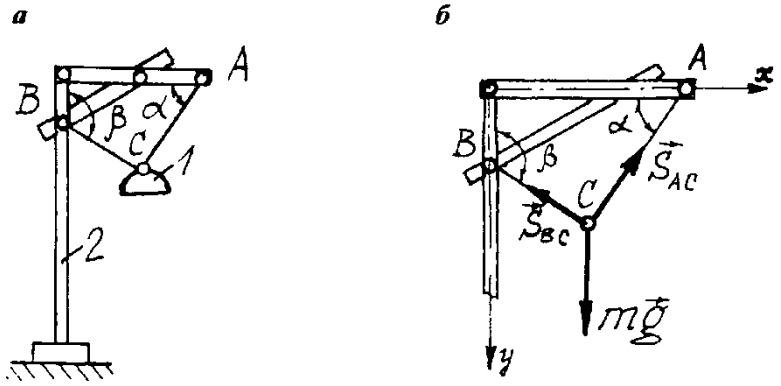


Рис. 1.3

Решение. Рассмотрим равновесие точки С (рис. 1.3,б)под действием силы тяжести фонаря mgи усилий S_{AC}(в шнуреАС) и S_{BC}(в тросе ВС). Эти силы представляют собой плоскую,сходящуюся в точке С систему, условия равновесия которойимеют вид:

$$\sum X_k = S_{AC}\cos\alpha - S_{BC}\cos(\beta - 90°) = 0;$$
$$\sum Y_k = -S_{BC}\sin(\beta - 90°) - S_{AC}\sin\alpha + mg = 0.$$

Решая полученные уравнения, найдем

$$S_{BC} = \frac{mg}{\sin(\beta-90°)+\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos(\beta-90°)} =$$

$$= \frac{51\cdot 9{,}81}{\sin(120°-90°)+\operatorname{tg}60°\cdot\cos(120°-90°)} = 250{,}155\ \text{Н};$$

$$S_{AC} = \frac{S_{BC}\cos(\beta-90°)}{\cos\alpha} = \frac{250{,}155\cos(120°-90°)}{\cos 60°} = 433{,}281\ \text{Н}.$$

Ответ: $S_{AC} \approx 433{,}3$ Н; $S_{BC} \approx 250{,}2$ Н.

1.4. Определить нагрузку R_Aв анкере А и угол наклона δшарнирно прикрепленного стержня АО шахтной подъемнойустановки (рис. 1.4,а), если известно, что масса груза m=1,53 т,а угол α=45°. Размером блока и массой каната пренебречь.

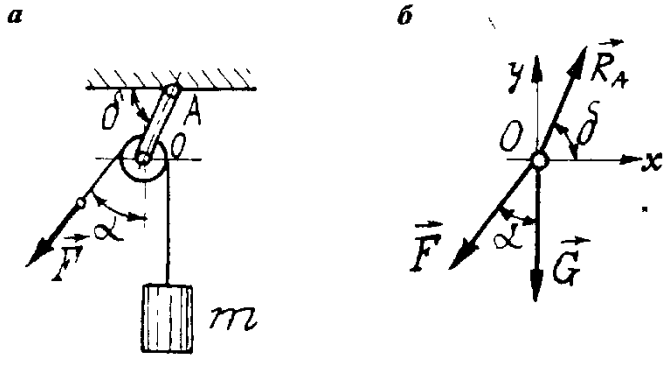


Рис. 1.4

Решение. На блок О (рис. 1.4,а) действуют сила тяжестиG=mg, сила натяжения нити F и реакция R_Aстержня АО,лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в точке О, так какразмерами блока пренебрегаем. Условия равновесия блока всистеме координат *xOy*имеют вид

$$\sum X_k = R_A \cos\delta - F\sin\alpha = 0;$$
$$\sum Y_k = -G - F\cos\alpha + R_A \sin\delta = 0.$$

Учитывая, что натяжение каната F равно силе тяжести G, изполученной системы уравнений находим

$$R_A = mg\sqrt{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2} =$$
$$= 1{,}53\cdot 9{,}81\sqrt{\sin^2 45° + (1+\cos 45°)^2} = 27{,}734 \text{ кН};$$
$$\delta = \operatorname{arctg}[(1+\cos\alpha)/\sin\alpha] = \operatorname{arctg}[(1+\cos 45°)/\sin 45°] = 67{,}5°.$$

Ответ: $R_A \approx 27{,}7$ кН; $\delta = 67{,}5°$.

1.5. При монтаже призабойной крепи шарнирнозакрепленную в точке А гидростойку опустили на временнуюопору В (рис. 1.5,а). Определить реакции опор А и В, если массагидростойки *m*=0,6 т, точка С - центр ее тяжести, *b*=0,5 м; *l*=0,7 м; α=30°.

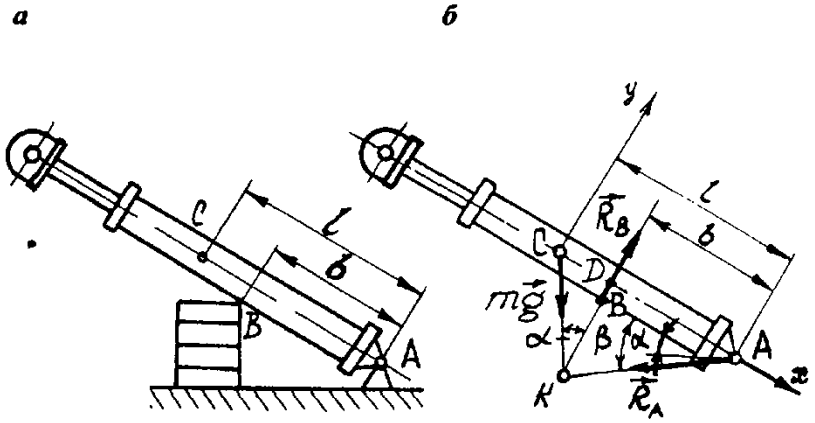


Рис. 1.5

Решение. На основании теоремы о равновесии трех силзаключаем, что линии действия приложенных к гидростойке силпересекаются в одной точке (рис. 1.5,б). Из треугольника KCDимеем tgα=CD/KD. Поскольку CD=*l*-*b*,

тоKD=CD/tgα=(*l*-*b*)/tg30°=(0,7-0,5)/tg30°=0,3464 м. Обозначим∠KADчерезβ, тогдаtgβ=KD/b=0,3464/0,5=0,6928; β=34°43'.

Условия равновесия системы сил:

$$\sum X_k = mg\sin\alpha - R_A\cos\beta = 0;$$
$$\sum Y_k = R_B - mg\cos\alpha - R_A\sin\beta = 0,$$

откуда имеем

$R_A = (mg \sin\alpha) / \cos\beta = (0{,}6 \cdot 9{,}81 \sin 30°) / \cos 34°43' \approx 3{,}58$ кН;

$$R_B = mg \cos\alpha + R_A \sin\beta =$$

$$= 0{,}6 \cdot 9{,}81 \cos 30° + 3{,}58 \sin 34°43' = 7{,}136 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A \approx 3{,}58$ кН; $R_B \approx 7{,}14$ кН.

Практическая работа №2
МОМЕНТ СИЛЫ

Скалярный момент силы относительно центра О:

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh,$$

где *h*- плечо силы относительно центра, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы.Момент считается положительным, если направлениевращения вокруг точки О, указываемое силой, противоположно направлению хода часовой стрелки.

Векторный момент (или вектор-момент) силыотносительно центра О:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где *r* - радиус-вектор точки приложения силы относительно центра О. Проекции вектор-момента на координатныеоси с началом в центре О

$$M_x(\vec{F}) = yZ - zY; \quad M_y(\vec{F}) = zX - xZ; \quad M_z(\vec{F}) = xY - yX$$

называются моментами силы относительно данных осей.В этих формулах *x, y, z*-координаты точки приложениясилы; *X, Y, Z*- проекции силы на координатные оси.

Момент силы относительно оси также равен моментупроекции силы на плоскость, перпендикулярную этой оси,относительно точки пересечения оси с плоскостью. Знакмомента положителен, если наблюдатель, глядя с положи-тельного конца оси, видит, что направление вращениявокруг оси, указываемое силой, противоположно направлению хода часовой стрелки. Момент силы относительнооси равен нулю, если линия действия силы и ось параллельны или пересекаются, т.е. если сила и ось лежат водной плоскости.

Пара сил - система, состоящая из двух параллельных,равных по модулю и противоположно направленных сил(F=-F). Действие пары сил на тело полностью определяетее вектор-момент M, направленный перпендикулярноплоскости пары так, чтобы, глядя с его конца, видетьвращение пары, направленное противоположно ходу часовой стрелки. Модуль момента $M=F \cdot h$, где h - плечо пары(расстояние между линиями действия ее сил). Скалярныймомент пары $M=\pm F \cdot h$; положительный знак соответствуетвращению пары против хода часовой стрелки. Суммамоментов сил, составляющих пару, относительно любогоцентра всегда равна моменту пары.

2.1. Для поворота исполнительного органа угольного комбайна используется гидродомкрат. Определить момент усилиягидродомкрата относительно оси О поворота в зависимости отугла поворота φ исполнительного органа, зная избыточное давление *p*на поршень гидродомкрата, диаметр поршня *d*и размеры*b, l, R, α, φ*, указанные на рис. 2.1, а.

Решение. Усилие, развиваемое гидродомкратом,

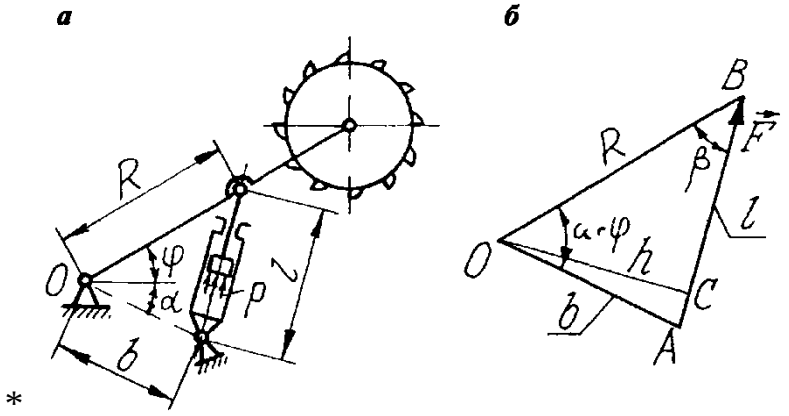
$$F = p\pi d^2 / 4,$$

его момент относительно оси поворота исполнительного органа

$$M = F\,h = p\pi d^2\,h\,/\,4,$$

где h - плечо силы F относительно центра О, которое находим из ΔОСВ (рис. 2.1,6):

$$h = R\sin\beta.$$



*

Рис. 2.1

Из ΔОАВпо теореме синусов

$$\sin\beta = [b\sin(\alpha+\varphi)]\,/\,l,$$

а по теореме косинусов

$$l = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Подставляя значения *h, sin β* и *l* в выражение для М, окончательно получаем

$$M_O = p\frac{\pi d^2}{4}\frac{bR\sin(\alpha+\varphi)}{\sqrt{b^2+R^2-2bR\cos(\alpha+\varphi)}}.$$

Ответ:

$$M_O = p\frac{\pi d^2}{4}\frac{bR\sin(\alpha+\varphi)}{\sqrt{b^2+R^2-2bR\cos(\alpha+\varphi)}}.$$

2.2. На четырехгранную буровую вышку массой *m*=11,2 т(рис. 2.2,а) действует горизонтальная ветровая нагрузка, равнодействующая которой F=30 кН. Для обеспечения устойчивостивышка закреплена при помощи четырёх одинаково натянутыхканатов (растяжек), расположенных симметрично в диагональных плоскостях вышки. Определить натяжение канатов,необходимое для создания запаса устойчивости К=1,5 приопрокидывании вокруг ребра АА'. Размеры указаны на рисунке.

Примечание Запасом устойчивости называется отношение суммымоментов удерживающих сил относительно ребра опрокидывания ксумме моментов опрокидывающих сил относительно этого же ребра.

Решение. Усилия T_1,T_2,T_3 и T_4в канатах образуют симметричную сходящуюся в некоторой точке на вертикальной оси вышки систему сил (рис. 2.2, б). Поскольку

величины этих усилий одинаковы, то сумма их проекций на горизонтальную плоскость равна нулю.

Следовательно, равнодействующая R четырех усилий в канатах направлена вниз по оси вышки и равна по модулю

$$R = 4T \sin 40°,$$

где Т- модуль усилия в канате.

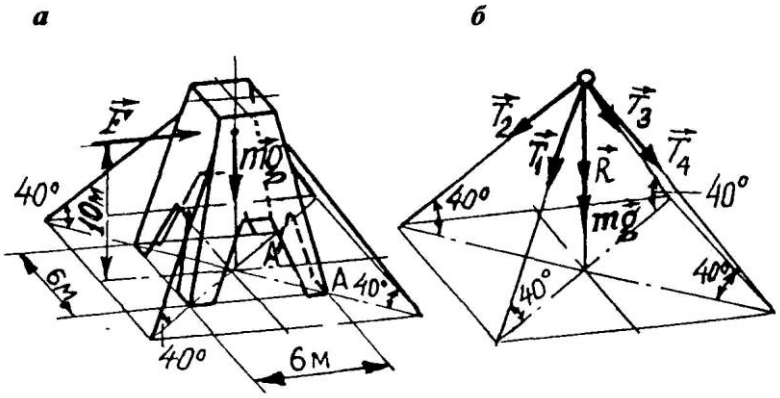


Рис. 2.2

К силам, удерживающим вышку от опрокидывания вокругребра AA', кроме равнодействующей R относится и сила тяжестиmg, тоже направленная по оси вышки.

Суммарныймомент удерживающих сил

$$M_{уд} = (R + mg)\, 6 / 2 = 3\,(4T \sin 40° + mg);$$

момент опрокидывающей силы

$$M_{опр} = F \cdot 10.$$

Поскольку с учетом запаса устойчивости К должно соблюдаться равенство $M_{уд}=K \cdot M_{опр}$, то

$$3(4T \sin 40° + mg) = K F \cdot 10,$$

откуда

$$T = (KF \cdot 10 / 3 - mg) / (4 \sin 40°) =$$

$$= (1{,}5 \cdot 30 \cdot 10 / 3 - 1{,}2 \cdot 9{,}81) / (4 \sin 40°) = 15{,}607 \text{ кН}.$$

Ответ: $T \approx 15{,}61$ кН.

2.4. Определить натяжение растяжек, необходимое для создания запаса устойчивости К=1,5 (см. примечание к задаче 2.2)трёхгранной буровой вышки массой *m*=5,1 т при опрокидыванииивокруг ребра АВ под действиемгоризонтальной ветровой нагрузки,равнодействующая которой F=20кН приложена в точке D (рис. 2.4).Усилия натяжения растяжекодинаковы. Размеры указаны нарисунке.

Решение. Усилия T_1, T_2иT_3в растяжках образуют сходящуюся в некоторой точке на вертикальной оси вышки систему сил.Поскольку модули Тэтих усилийодинаковы, то сумма их проекцийна горизонтальную плоскость равнанулю. Следовательно, равнодействующая R трех усилий в растяжках направлена вниз по оси вышки и равна по модулю

$$R = 3T \sin\gamma,$$

где γ - угол наклона растяжки к горизонту;

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{10}{OC_1 - O'C'} = \operatorname{arctg}\frac{10}{18/\cos 30° - 1/\cos 30°} \approx 27°.$$

К силам, удерживающим вышку от опрокидывания вокруг ребра AA', кроме равнодействующей R относится и сила тяжести ^{m}g, тоже направленная по оси вышки.

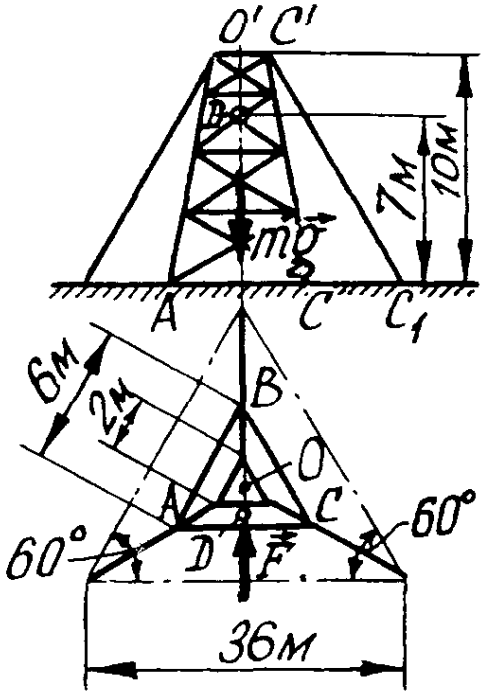


Рис. 2.4

Суммарный момент удерживающих сил

$$M_{уд} = (R + mg)\,(6/2)\,\operatorname{tg} 30° = (3T \sin\gamma + mg)\sqrt{3};$$

момент опрокидывающей силы

$$M_{опр} = (F \cos 60°)7 = 3{,}5F.$$

Поскольку с учётом запаса устойчивости К должно соблюдаться равенство $M_{уд}=K\cdot M_{опр}$, то

$$(3T \sin\gamma + mg)\sqrt{3} = 3{,}5KF,$$

откуда

$$T = (3{,}5KF - mg\sqrt{3}) / (3\sqrt{3} \sin\gamma) =$$

$$= (3{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 20 - 5{,}1 \cdot 9{,}81\sqrt{3}) / (3\sqrt{3} \sin 27°) = 7{,}776 \text{ кН}.$$

Ответ: $T \approx 7{,}78$ кН.

2.5. Определить запас устойчивости проходческого комбайнасо стреловидным рабочим органом при опрокидываниивокруг ребра AB под действием силы F=100 кН и пары сил смоментом M=23 кНм, приложенных к режущей коронке, атакже сил тяжести стрелы G_1=65 кН и корпуса G_2=335 кН (см.примечание к задаче 2.2).

Размеры взять с рис. 2.5.

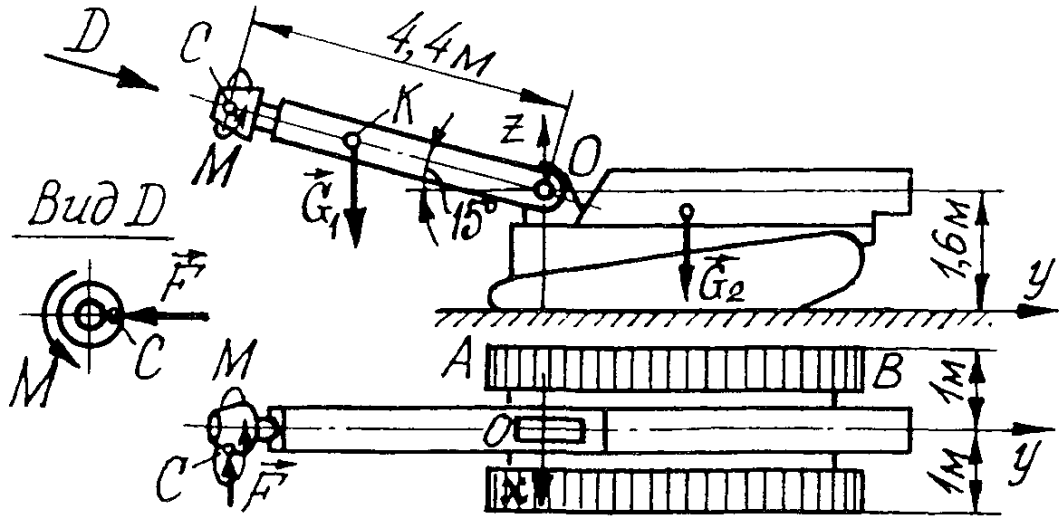


Рис. 2.5

Решение. Силами, удерживающими комбайн от опрокидывания, в рассматриваемом случае являются силы тяжестистрелы и корпуса, создающие относительно ребра АВудерживающий момент,который определяется по формуле

$$M_{уд} = (G_1 + G_2)1.$$

Силы резания, действующие на коронку, стремятсяопрокинуть комбайн вокруг ребра АВ. Плечом силы Fотносительно этого ребра является высота А точки С надподошвой выработки, причем *h=1,6+4,4 sin15°*. Вектор-момент Мпары сил направлен вдоль оси стрелы, его проекция наребро АВ равна Mcos15°. Следовательно, суммарный опрокидывающий момент

$$M_{опр} = F(1{,}6 + 4{,}4 \sin 15°) + M \cos 15°.$$

Тогда запас устойчивости проходческого комбайна

$$K = \frac{G_1 + G_2}{F(1{,}6 + 4{,}4\sin 15°) + M\cos 15°} =$$

$$= \frac{65 + 335}{100(1{,}6 + 4{,}4\sin 15°) + 23\cos 15°} = 1{,}351.$$

Ответ: $K \approx 1{,}35$.

Практическая работа №3
РАВНОВЕСИЕ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Для равновесия системы сип, произвольно расположенных в пространстве, необходимо и достаточно, чтобыглавный вектор этой системы сил и ее главный моментотносительно любого центра О, т.е. геометрическая суммавектор-моментов всех сил системы относительно того жецентра О, были равны нулю:

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{M}_O = 0,$$

или в проекциях на координатные оси:

$$\sum X_k = 0; \quad \sum Y_k = 0; \quad \sum Z_k = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

При равновесии плоской системы сил необходимо идостаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую издвух координатных осей и сумма моментов этих сил относительно произвольного центра О на плоскости были равнынулю:

$$\sum X_k = 0; \quad \sum Y_k = 0; \quad \sum M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Для этого же случая используют еще две формы условийравновесия:

$$\text{а)} \sum X_k = 0; \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0,$$

причемцентры Аи Вне должны лежать на прямой,перпендикулярной оси *x*;

$$\text{б)} \sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_k) = 0,$$

причем центры А, В и С не должны располагаться на однойпрямой.

При равновесии системы параллельных сил координатныеоси выбирают так, чтобы ось *z*была направлена параллельносилам. Тогда проекции каждой из сил на оси *хиу*и ихмоменты относительно оси *z* будут равны нулю и условияравновесия принимают вид

$$\sum Z_k = 0; \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;$$

Равновесие плоской системы параллельных силрассматривают в системе координат, где ось *Оу*параллельнасилам. Тогда проекция каждой из сил на ось *Ох*будет равнанулю, и остаются два условия равновесия:

$$\sum Y_k = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_k) = \sum M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

3.1. Плоская система сил

3.1. Определить давление на оси ведущего 1 и отклоняющего2 шкивов многоканатной подъемной машины (рис. 3.1, а) при ихравномерном вращении под действием крутящего момента М, еслисуммарное натяжение набегающих ветвей канатов S_1=147 кН,суммарное натяжение сбегающих ветвей S_2=113 кН, массышкивов: m_1=7,85 т, m_2=2,25 т; угол обхвата α=190°. Трением вподшипникахпренебречь.

Решение. Рассмотрим сначала отклоняющий шкив при его равномерном вращении без учета сил трения (рис. 3.1, б). Кромесилы тяжести m_2g шкива на него действует натяжение S_2сбегающих ветвей, натяжение S'_2набегающих ветвей и реакцияR_{O2}опоры, численно равная суммарному давлению внешних сил на ось и представленная на рисунке в виде составляющих X_{O2}и Y_{O2},направленных параллельно соответствующим осям координат. Одно из условий равновесия шкива имеет вид

$$\sum M_{O_2}(\vec{F}_k) = S'_2 r_2 - S_2 r_2 = 0,$$

где r_2- радиус отклоняющего шкива. Из этого уравнения получаем

$$S'_2 = S_2 = 113 \text{ кН}.$$

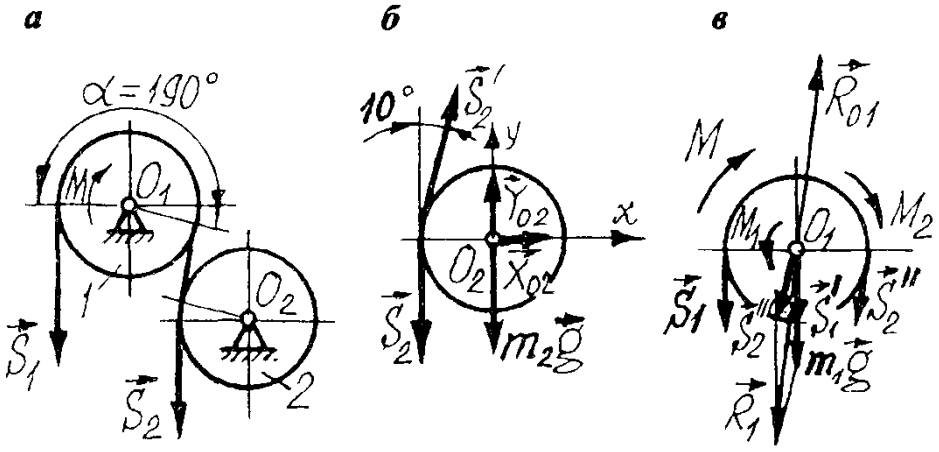


Рис. 3.1

Теперь можно найти давление на ось O_2. Для этого составимостальные два уравнения равновесия системы сил:

$$\sum X_k = X_{O_2} + S'_2 \sin 10° = 0;$$

$$\sum Y_k = Y_{O_2} - m_2 g - S_2 + S'_2 \cos 10° = 0,$$

откуда

$$X_{O_2} = -S'_2 \sin 10° = -113 \sin 10° = -19{,}622 \text{ кН};$$

$$Y_{O_2} = m_2 g + S_2 - S'_2 \cos 10° =$$

$$= 2{,}25\ 9{,}81 + 113 - 113 \cos 10° = 23{,}789 \text{ кН}.$$

Полная реакция оси O_2, численно равная давлению на ось,

$$R_{O_2} = \sqrt{X_{O_2}^2 + Y_{O_2}^2} = \sqrt{(-19{,}622)^2 + 23{,}789^2} = 30{,}837 \text{ кН}.$$

На ведущем шкиве суммарное натяжение набегающих ветвейканатов равно S_1, натяжение сбегающих ветвей равно S''_2, причемпо закону о действии и противодействии S''_2=-S'_2. Давление на осьO_1можно найти, рассуждая аналогично предыдущему случаю.Но мы поступим несколько иначе. В соответствии с теоремой опараллельном переносе силы (см. [2], § 11) перемещаем силы S_1иS''_2в центр O_1, добавляя при этом пары сил с моментами $M_1=S_1r_1$ и $M_2=S''_2r_1$, где r_1- радиус ведущего шкива (сумма этих моментов уравновешивается крутящим моментом M, в чем можноубедиться, составив уравнение равновесия ведущего шкива в формеравенства нулю суммы моментов действующих на него силотносительно центра O_1). Теперь на ось O_1действует сходящаясясистема внешних сил m_1g, S_1и S'''_2, равнодействующая R_1,которых и равна давлению на ось. Величину этой силы находим потеореме косинусов:

$$R_1 = R_{O_1} = \sqrt{(m_1 g + S'_1)^2 + (S''_2)^2 - 2(m_1 g + S'_1) S''_2 \cos 170°} =$$

$$= \sqrt{(m_1 g + S_1)^2 + S_2^2 - 2(m_1 g + S_1) S_2 \cos 170°} =$$

$$= \sqrt{(7{,}85 \cdot 9{,}81 + 147)^2 + 113^2 - 2(7{,}85 \cdot 9{,}81 + 147) 113 \cos 170°} =$$

$$= 335{,}865 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_{O_1} \approx 335{,}87$ кН; $R_{O_2} \approx 30{,}84$ кН.

3.2. Определить давление колесных пар четырехосногожелезнодорожного

крана (рис.3.2, а) на рельсы в точках A, B, C иD. Известны масса крана $m_{кр}$, (центр масс - точка К), масса грузам$_{гр}$и размеры, приведенные на рисунке.

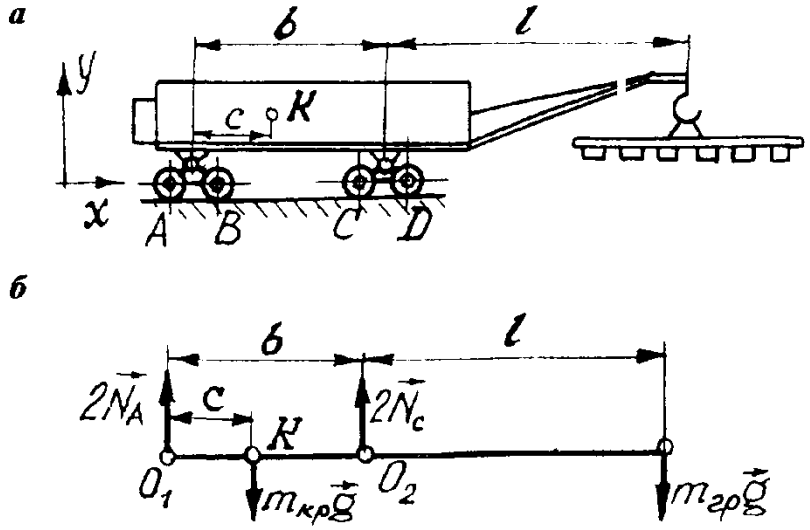


Рис. 3.2

Решение. Поскольку реакции опоры N_A, N_B, N_Cи N_D,численно равные давлению соответствующих колесных пар, вданном случае направлены вертикально вверх, а внешние силыпредставлены только силами тяжести, то допустимо считать, чтона кран с грузом действует плоская система параллельных сил.Кроме того, полагаем, что рессорное подвешивание крановыхтележек выравнивает нагрузки на колесные пары так, что $N_A=N_B$и$N_C=N_D$ипоэтому вместо перечисленных реакций к центрам O_1иO_2тележек допустимо приложить их равнодействующие $2N_A$и$2N_C$(рис. 3.2,б). Тогда уравнения равновесия крана с грузомимеют вид

$$\sum Y_k = 2N_A + 2N_C - m_{кр}g - m_{гр}g = 0;$$

$$\sum M_{O_1}(\vec{F}_k) = -m_{кр}g\,c + 2N_C b - m_{гр}g\,(b+l) = 0.$$

Из второго уравнения получаем

$$N_C = g\,[m_{кр}c + m_{гр}(b+l)]\,/\,(2b),$$

а из первого:

$$N_A = (m_{кр}g + m_{гр}g)/2 - N_C =$$

$$= (m_{кр}g + m_{гр}g)/2 - g\,[m_{кр}c + m_{гр}(b+l)]\,/\,(2b) =$$

$$= g\,[m_{кр}(b-c) - m_{гр}l]\,/\,(2b).$$

Ответ: $N_A = N_B = g\,[m_{кр}(b-c) - m_{гр}l]\,/\,(2b);$

$N_C = N_D = g\,[m_{кр}c + m_{гр}(b+l)]\,/\,(2b).$

3.3. На скребок одноцепногоскребкового конвейера действуютсила Q сопротивления перемещению груза, приложенная на расстоянии*l*от оси конвейера, атакже силы S_1и S_2 натяженияведущей и ведомой ветвей цепи(рис. 3.3). Зная силы S_2и Q,длину *t*звена цепи и расстояние*l*, определить силу S_1 и угол α поворота скребка.

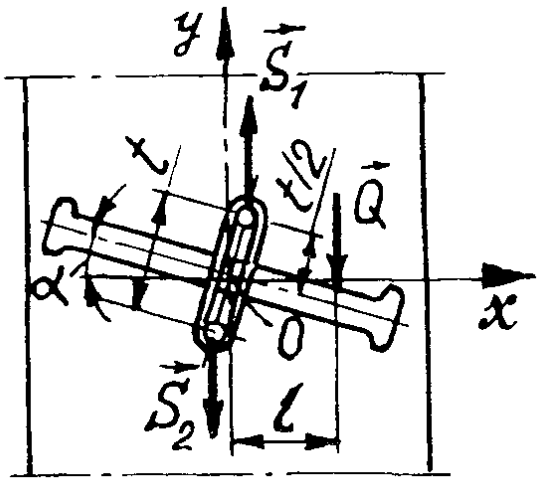


Рис. 3.3

Решение. На скребок в горизонтальной плоскости действуетсистема параллельных сил, уравнения равновесия которой имеютвид

$$\sum Y_k = S_1 - S_2 - Q = 0;$$

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = -Q\,l + S_1(t/2)\sin\alpha + S_2(t/2)\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$S_1 = S_2 + Q;$$

$$\sin\alpha = 2Q\,l/[t\,(S_1 + S_2)] = 2Q\,l/[t\,(Q + 2S_2)].$$

Ответ: $S_1 = S_2 + Q$;

$$\alpha = \arcsin\frac{2Q\,l}{t(Q + 2S_2)}.$$

3.2. Пространственная система сил

3.4. Платформа экскаватора опирается на гусеницы A, B, C;все остальные его части могут вращаться вокруг вертикальной оси,проходящей через центр O (рис. 3.4, а). Сила тяжести G вращающихся частей приложена в точке K. Определить нормальные реакции в точках опоры при заданном угле поворота φ, если известныразмеры: *lAB=b; l_{OC}=c; l_{OK}=r*и угол α.

Решение. Считаем, что платформа находится в равновесииподдействиемпространственнойсистемывертикальныхсил,включающей в себя силу тяжести G и реакции N_A, N_Bи N_cопор A, B и C. Располагаем систему координат так, как показано нарис. 3.4, б.

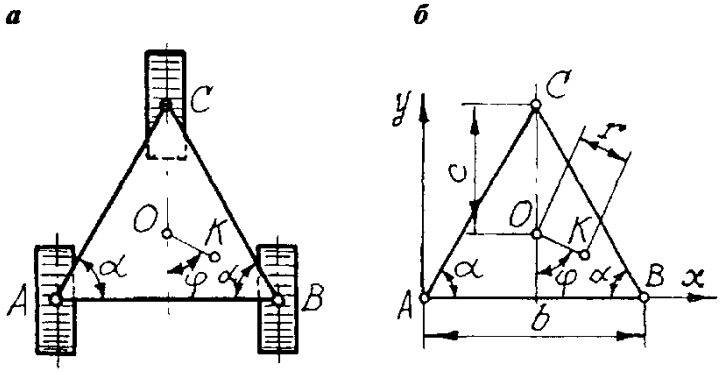


Рис. 3.4

При составлении уравнений равновесия платформыучитываем, что моменты всех сил относительно оси Azи проекции этих сил на оси Ax и Ay равны нулю, а также равны нулюмомент силы N_Aотносительно осей Ax и Ay и момент силы N_Bотносительно оси Ax, поскольку эти силы пересекают указанныеоси.

Таким образом, остаются только три уравнения равновесия:

$$\sum Z_k = N_A + N_B + N_C - G = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = N_C\,(b/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha - G\,[(b/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha - c - r\cos\varphi] = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = G\,(b/2 + r\sin\varphi] - N_B b - N_C\,(b/2) = 0. \quad (3)$$

Решая последовательно уравнения (2), (3) и (1), получаем

$$N_C = G\,[1 - 2\,(c + r\cos\varphi)/(b\,\mathrm{tg}\,\alpha)];$$

$$N_B = G\,\frac{c\cos\alpha + r\cos(\varphi+\alpha)}{b\sin\alpha};\quad N_A = G\,\frac{c\cos\alpha + r\cos(\varphi-\alpha)}{b\sin\alpha}.$$

Ответ: $N_A = G\,[c\cos\alpha + r\cos(\varphi+\alpha)]/(b\sin\alpha)$;
$N_B = G\,[c\cos\alpha + r\cos(\varphi-\alpha)]/(b\sin\alpha)$;
$N_C = G\,[1 - 2(c + r\cos\varphi)/(b\,\mathrm{tg}\,\alpha)]$.

3.5. Вышка подвесной канатной дороги (рис.3.5, а) находится под действием расположенных в вертикальных плоскостях I и IIусилий в канатах $T_1=T_1'$=150 кН, $T_2=T_2'$=90 кН, ветровой нагрузки q=1,5 кН/м и силы тяжестиG=250 кН. Считая креплениевышки к фундаменту жесткой заделкой, определить реакцию заделки (R и M_0), если известны размеры d=7 м; h=18 м; α=45°;β=15°.

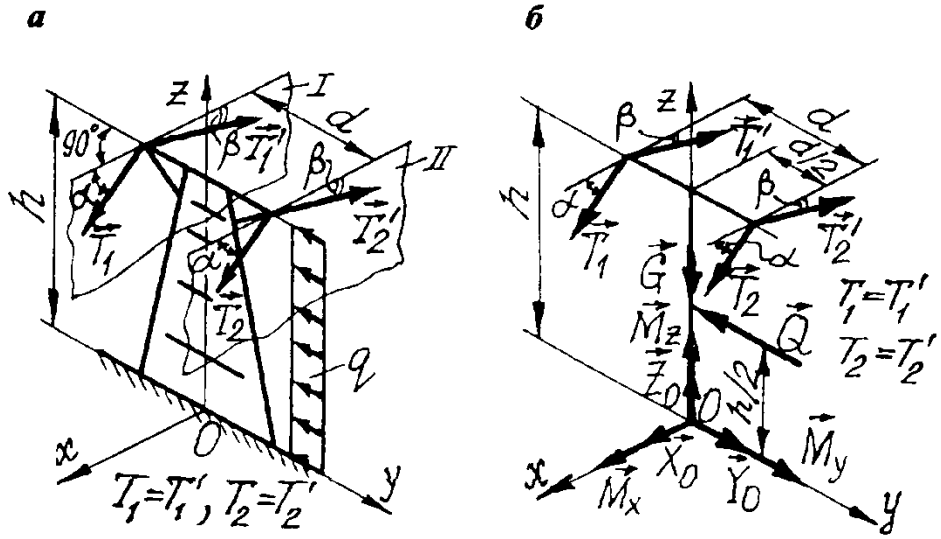


Рис. 3.5

Решение. Составляя расчетную схему вышки, заменяемравномерно распределенную нагрузку *q*сосредоточенной силойQ, приложенной посередине высоты конструкции, причем Q=qh. Мысленно отбрасывая жесткую заделку основания, заменимее действие реакцией R и моментом M_0, представленными насхеме в виде составляющих X_0, Y_0,Z_0иM_x, M_y, M_z, направленных по соответствующим осям координат (рис. 3.5, б).Указанные силывместес усилиями T_1, T_1', T_2, T'_2в канатах исилой тяжести G образуют уравновешенную систему сил. Присоставлении уравнений равновесия учитываем, что линии действиясилX_o, Y_o,Z_0пересекают координатные оси, линия действиясилы тяжести G совпадает с

осью Ozи пересекает оси Охи Оу,следовательно, моменты этих сил относительно указанных осейравны нулю.

Уравнения равновесия:

$$\sum X_k = X_O + (T_1 + T_2)\cos\alpha - (T_1' + T_2')\cos\beta = 0;$$

$$\sum Y_k = Y_O - Q = 0;$$

$$\sum Z_k = Z_O - G - (T_1 + T_2)\sin\alpha - (T_1' + T_2')\sin\beta = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = M_x + Q\,h/2 + [(T_1 - T_2)\sin\alpha + (T_1' - T_2')\sin\beta]\,d/2 = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = M_y + [(T_1 + T_2)\cos\alpha - (T_1' + T_2')\cos\beta]\,h = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = M_z + [(T_1 - T_2)\cos\alpha - (T_1' - T_2')\cos\beta]\,d/2 = 0.$$

По условию задачи $T_1=T_1'$и $T_2=T'_2$, следовательно,

$$X_O + (T_1 + T_2)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0;$$

$$Y_O - Q = 0;$$

$$Z_O - G - (T_1 + T_2)(\sin\alpha + \sin\beta) = 0;$$

$$M_x + Q\,h/2 + (T_1 - T_2)(\sin\alpha + \sin\beta)\,d/2 = 0;$$

$$M_y + (T_1 + T_2)(\cos\alpha - \cos\beta)\,h = 0;$$

$$M_z + (T_1 - T_2)(\cos\alpha - \cos\beta)\,d/2 = 0,$$

откуда

$$X_O = -(T_1 + T_2)(\cos\alpha - \cos\beta) =$$

$$= -(150 + 90)(\cos 45° - \cos 15°) = 62{,}117 \text{ кН};$$

$$Y_O = Q = qh = 1{,}5 \cdot 18 = 27 \text{ кН};$$

$$Z_O = G + (T_1 + T_2)(\sin\alpha + \sin\beta) =$$

$$= 250 + (150 + 90)(\sin 45° + \sin 15°) = 481{,}822 \text{ кН};$$

$$M_x = -Q\,h/2 - (T_1 - T_2)(\sin\alpha + \sin\beta)\,d/2 =$$

$$= -27 \cdot 18/2 - (150 - 90)(\sin 45° + \sin 15°)\,7/2 = -445{,}844 \text{ кН};$$

$$M_y = -(T_1 + T_2)(\cos\alpha - \cos\beta)\,h =$$

$$= -(150 + 90)(\cos 45° - \cos 15°)\,18 = 1118{,}098 \text{ кН};$$

$$M_z = -(T_1 - T_2)(\cos\alpha - \cos\beta)\,d/2 =$$

$$= -(150 - 90)(\cos 45° - \cos 15°)\,7/2 = -54{,}352 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_O \approx 62{,}12$ кН; $Y_O = 27$ кН; $Z_O \approx 481{,}82$ кН;

$M_x \approx -445{,}84$ кН·м; $M_y \approx 1118{,}1$ кН·м;

$M_z \approx -54{,}35$ кН·м.

3.6. Блок С подъемного устройства закреплен на балке АВ,жестко заделанной в точке А (рис. 3.6, а). Определить реакцию Rи момент M_Aв заделке при равномерном подъеме груза Q. Известно: Q=2 кН; *l*=1 м; h=0,3 м; α=30°. Массой балки, блока иканата пренебречь.

Решение. Расчетная схема балки показана на рис 3.6, б. Действие отброшенной жесткой заделки на балку в точке А заменено реакцией R и моментом M_A, представленными на схеме в виде составляющих X_A, Y_A, Z_Aи M_x, M_y, M_z, направленных по соответствующим осям координат, а давление груза Q на блок С - усилиями Q и Q' в ветвях каната, причем Q=Q'.

Под действием указанных сил балка находится в равновесии. Заметим, что реакции X_A, Y_A, Z_Aпересекают все координатные оси, асила Q параллельна оси Az, поэтому моменты этих сил относительно указанных осей равны нулю. Уравнения равновесия:

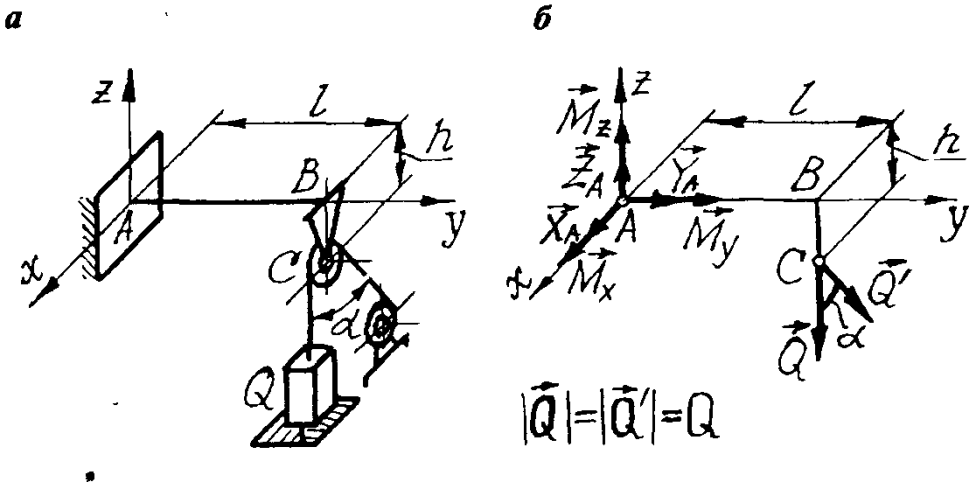


Рис. 3.6

$$\sum X_k = X_A - Q' \sin\alpha = 0;$$
$$\sum Y_k = Y_A = 0;$$
$$\sum Z_k = Z_A - Q - Q' \cos\alpha = 0;$$
$$\sum M_x(\vec{F}_k) = M_x - Ql - (Q' \cos\alpha)\, l = 0;$$
$$\sum M_y(\vec{F}_k) = M_y + (Q' \sin\alpha)\, h = 0;$$
$$\sum M_z(\vec{F}_k) = M_z + (Q' \sin\alpha)\, l = 0,$$

откуда

$$X_A = Q' \sin\alpha = Q \sin\alpha = 2 \sin 30° = 1 \text{ кН};$$
$$Y_A = 0;$$
$$Z_A = Q + Q' \cos\alpha = Q + Q \cos\alpha = 2 + 2 \cos 30° = 3{,}732 \text{ кН};$$
$$M_x = Ql + (Q' \cos\alpha)\, l = Ql + (Q \cos\alpha)\, l =$$
$$= 2 \cdot 1 + (2 \cos 30°)1 = 3{,}732 \text{ кН·м};$$
$$M_y = -(Q' \sin\alpha)\, h = -(Q \sin\alpha)\, h = -(2 \sin 30°)\, 0{,}3 = -0{,}3 \text{ кН·м};$$
$$M_z = -(Q' \sin\alpha)\, l = -(Q \sin\alpha)\, l = -(2 \sin 30°)1 = -1 \text{ кН·м}.$$

Ответ: $X_A = 1$ кН; $Y_A = 0$; $Z_A \approx 3{,}73$ кН;
$M_x \approx 3{,}73$ кН·м; $M_y = -0{,}3$ кН·м; $M_z = -1$ кН·м.

Практическая работа №4
СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ.
ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ.

Пара сил - это система двух равных по модулю,параллельных и направленных в противоположные сторонысил, действующих на абсолютно твердое тело. Система

силF, F', образующих пару, не находится в равновесии и неимеет равнодействующей.

Вектор-моментом пары называют вектор M, модулькоторого равен произведению модуля одной из сил пары на ееплечо h (расстояние между линиями действия сил пары) икоторый направлен перпендикулярно плоскости действияпары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернутьтело против хода часовой стрелки.

Скалярный момент пары $M=\pm F\cdot h$; знак "плюс" соответствует вращению пары против хода часовой стрелки. Суммамоментов сил, составляющих пару, относительно любой точкиравна моменту пары.

При сложении пар сил геометрически суммируют ихвектор-моменты, т.е. несколько пар сил эквивалентны однойпаре, вектор-момент которой равен геометрической суммевектор-моментов пар, составляющих систему, причем этотвектор может быть приложен в любой точке.

Действие системы сил на тело полностью определяетсяееглавнымвектором$R=\sum F_k$иглавныммоментом$M_o=\sum M_o(F_k)$относительно некоторого центра O. Проекции этих векторов на координатные оси:

$$R_x=\sum X_k;\quad R_y=\sum Y_k;\quad R_z=\sum Z_k;$$

$$M_x=\sum M_x(\vec{F}_k);\quad M_y=\sum M_y(\vec{F}_k);\quad M_z=\sum M_z(\vec{F}_k).$$

Любую систему сил в общем случае можно привести кнекоторому произвольно выбранному центру, т.е. заменитьсилой, равной главному вектору системы и приложенной вцентре приведения, и парой сил, момент которой равенглавному моменту системы относительно этого центра(теорема Пуансо).

Простейший вид системы сил определяется значениямиее векторного и скалярного статических инвариантов, т.е.величин, не зависящих от центра приведения; таковымиявляютсяглавныйвекторRи скалярное произведение

$$\vec{R}\cdot\vec{M}_O=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z.$$

Если $R\neq0$, а $R\cdot M\neq0$, то система приводится к равнодействующей *R*, линия действия которой находится в плоскости, перпендикулярной M_o, на расстоянии $d=|M_o|/R$от центра приведения. Отсюда, кстати, следует, что моментравнодействующей относительно произвольного центраравен геометрической сумме моментов составляющих силотносительно этого же центра (теорема Вариньона).

Естественно, если $R\neq0$ и $R\cdot M_0=0$, но при этом ещеи $M_o=0$, то d=0, т.е. линия действия равнодействующейпроходит через центр приведения.

Если R=0, а $M_o\neq0$, то система приводится к паре силс моментомM_0.

Если $R\neq0$ и $R\cdot M_o\neq0$, то простейший вид системы -динамический винт (силовой винт, динама), состоящий изсилы R и пары M', плоскость которой перпендикулярналинии действия силы. При этом векторы R и M' направленыпо одной прямой, называемой винтовой осью системы; ееуравнения:

$$\frac{R_x}{M_x-yR_z+zR_y}=\frac{R_y}{M_y-zR_x+xR_z}=\frac{R_z}{M_z-xR_y+yR_x}.$$

Момент пары

$$M' = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R}.$$

Отметим, что при R||M_oвинтовая ось проходит черезцентр приведения. Если же векторы R и M_oне параллельныи не перпендикулярны друг другу, то такая система сил приводится к динамическому винту, ось которого не проходитчерез центр О.

К одной силе (равнодействующей) или к одной паре силдинамический винт привести нельзя.

Если сложить силу R с одной из сил пары M', то динамуможно привести к двум скрещивающимся силам.

При R=0 и M_o=0 система является уравновешенной.

4.1. Корпус редуктора подъемной машины опирается на пружины A и B (рис. 4.1,а), жесткость каждой из которых равна *c*.Редуктор имеет два симметрично расположенных ведущих вала ицентральный ведомый вал; направления вращения ведущих иведомого валов одинаковы. Моменты на ведущих валах равны M_1передаточное отношение редуктора *i*; коэффициент полезногодействия η; расстояние AB=*l*. Точка O - центр тяжести редуктора. Определить угол поворота редуктора в установившемсярежиме работы.

Примечание. Моменты на ведомом и ведущих валах редукторасвязаны зависимостью $M_2 = nM_1 i\eta$, *где* n - *число ведущих валов.*

Решение. Направление действия момента M_1совпадает снаправлением вращения ведущего вала, а момента M_2 - противоположно направлению вращения ведомого вала. Поскольку валывращаются в одну сторону, делаем вывод, что направления моментов M_1и M_2противоположны. Число ведущих валов n=2.Следовательно, момент равнодействующей пары сил

$$M = M_2 - 2M_1 = 2M_1 i\eta - 2M_1 = 2M_1(i\eta - 1),$$

а его направление противоположно направлению вращения валов.

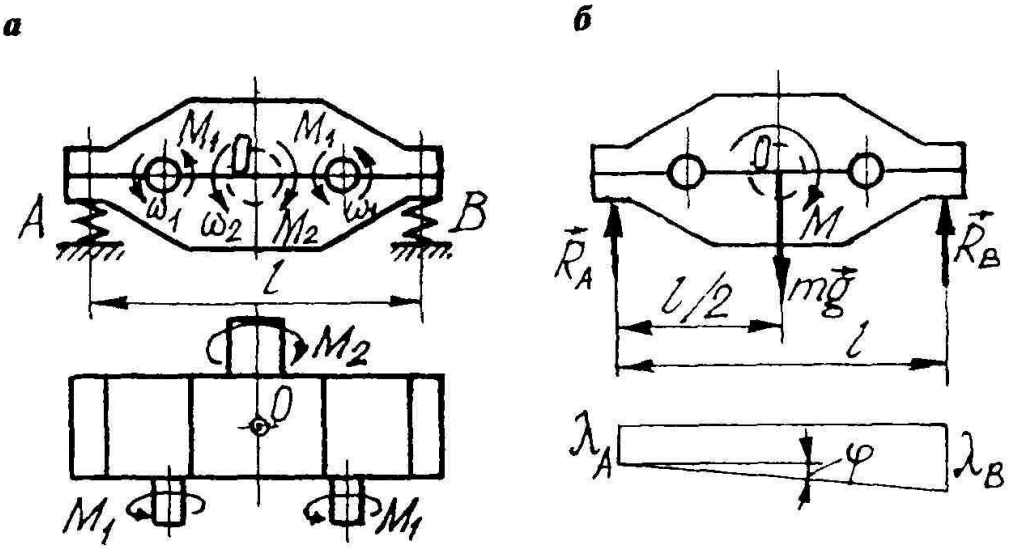


Рис. 4.1

Теперь система приложенных к редуктору внешних сил(равнодействующая пара Ми сила тяжести *mg*) и реакций R_Aи R_Bпружинных опор принимает вид, показанный на рис. 4.1, б.

Уравнения равновесия этой системы:

$$\sum Y_k = R_A + R_B - mg = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = R_B l - mgl/2 - M = 0,$$

откуда

$$R_B = M/l + mg/2; \quad R_A = mg/2 - M/l.$$

Соответствующие этим усилиям деформации пружин:

$$\lambda_A = R_A/c; \ \lambda_B = R_B/c.$$

Угол поворота корпуса редуктора:

$$\varphi = \text{arctg}\,[(\lambda_B - \lambda_A)/l] = \text{arctg}\,[(R_B - R_A)/(cl)] =$$
$$= \text{arctg}\,[2M/(cl^2)] = \text{arctg}\,[4M_1(i\eta - 1)]/(cl^2),$$

причем φ не зависит от массы редуктора.

Ответ: $\varphi = \text{arctg}\,[4M_1(i\eta - 1)]/(cl^2)$.

4.2. В буровом исполнительном органе (рис. 4.2) проходческогокомбайна наружные режущие лопасти, число которых равно *3k*,вращаются навстречу *2(n-k)*внутренним лопастям; *n* -полное число кольцевых линийрезания. К каждой лопастиприложена сила F; совокупность этих сил образуетсистему пар. Зная диаметр D,шаг установки лопастей *h* ичисло *n* линий резания, определить такое число *k*, чтобыуказанная система пар былауравновешенной.

Решение. Приложеннаяк каждой наружной лопасти сила F создает вокруг центральной оси момент

$$M_{i\ нар} = F[D/2 - h(i-1)]; \qquad (1)$$

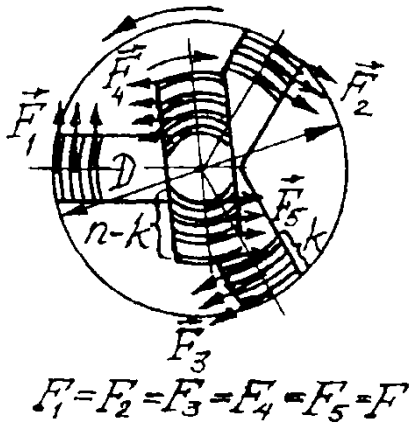


Рис. 4.2

где *i*=1,2, ...,*k*- номер наружной кольцевой канавки, начиная снаибольшей по диаметру. Совокупность выражений (1) представляет собой арифметическую прогрессию, первый член которойравен FD/2, последний: *F[D/2-h(k-1)]*, а число членов прогрессии равно *k*. Сумма к первых членов арифметической прогрессии

$$S_1 = (M_{1\ нар} + M_{k\ нар})\,k/2 = Fk[D - h(k-1)]/2$$

представляет собой момент сил сопротивления, приложенных кодному полному ряду наружных лопастей. Таких рядов висполнительном органе три, поэтому суммарный момент силсопротивления, приложенных ко всем наружным лопастям,

$$M_{нар} = 3\,S_1 = 3\,Fk\,[D - h\,(k-1)]\,/\,2. \qquad (2)$$

Сила F, приложенная к каждой внутренней лопасти, создаетвокруг центральной оси момент

$$M_{j\,вн} = F\,[D\,/\,2 - kh - h\,(j-1)], \qquad (3)$$

где *j=1,2,...,(n-k)*- номер внутренней кольцевой канавки,начиная с наибольшей по диаметру. Совокупность выражений (3)является арифметической прогрессией, первый член которой равен*F(D/2-kh)*, последний: *F[D/2-h(n-1)]*, а число членов прогрессии равно (n-k). Сумма (n-k) первых членов арифметической прогрессии

$$S_2 = (M_{1\,вн} + M_{n-k\,вн})\,(n-k)\,/\,2 = F\,(n-k)\,[D - h\,(n+k-1)]\,/\,2;$$

эта сумма представляет собой момент сил сопротивления, приложенных к одному полному ряду внутренних лопастей. Таких рядовв исполнительном органе два, поэтому суммарный момент силсопротивления, приложенных ко всем внутренним лопастям,

$$M_{вн} = 2\,S_2 = 2F\,(n-k)\,[D - h\,(n+k-1)]\,/\,2. \qquad (4)$$

Для того чтобы система приложенных к рабочему органупар сил была уравновешенной, необходимо равенство $M_{нар}=M_{вн}$.Приравнивая правые части выражений (2) и (4), получаем послеприведения подобных

$$5\,k^2h - 5\,kD - 5\,kh + 2\,nD - 2\,hn^2 + 2\,hn = 0,$$

или

$$k^2 - k\,(D+h)\,/\,h + 2\,n\,[(D+h)\,/\,h - n]\,/\,5 = 0.$$

Обозначая*(D+h)/(2h)=q*, получим

$$k^2 - 2\,kq + 0{,}4\,n\,(2q-n) = 0,$$

откуда

$$k_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2 - 0{,}4n(2q-n)}\,.$$

Больший из корней следует признать неудовлетворительным,так как в этом случае число *k*наружных лопастей в одном ряду призаданном шаге *h* должно быть больше общего возможного числакольцевых линий резания. Следовательно,

$$k = q - \sqrt{q^2 - 0{,}4n(2q-n)}\,.$$

Ответ: $k = q - \sqrt{q^2 - 0{,}4n(2q-n)}$, где $q = (D+h)\,/\,(2h)$.

4.3. На редуктор лебедки экскаватора (рис. 4.3, а) действуетсистема активных сил: силы натяжения канатов T=375 кН, расположенные симметрично относительно плоскости *xOy*, моментдвигателяM=110 кНм и сила тяжестиG=800 кН. Известныразмеры: D=1,2 м; e=0,5 м; h=1м; α=45°. Привести кпростейшему виду реакции фундамента редуктора, уравновешивающие данную систему.

Решение. Выбираем в качестве центра приведения начало координат *O*.

Главный вектор активных сил $R_a=2T+G$,его проекции:

$$R_{ax} = 2T\sin\alpha = 2\cdot 375\,\sin 45° = 530{,}33\ кН;$$

$$R_{ay} = -G + 2T\cos\alpha = -800 + 2\cdot 375\,\cos 45° = -269{,}67\ кН;$$

$$R_{az} = 0;$$

модуль

$$R_a = 534{,}887 \text{ кН};$$

угол наклона к оси *Ox*(рис. 4.3, б):

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(R_{ay} / R_{ax}\right) = \operatorname{arctg}\left[(2T\sin\alpha)/(-G+2T\cos\alpha)\right] =$$
$$= \operatorname{arctg}(-0{,}5085) = -26°57{,}2'.$$

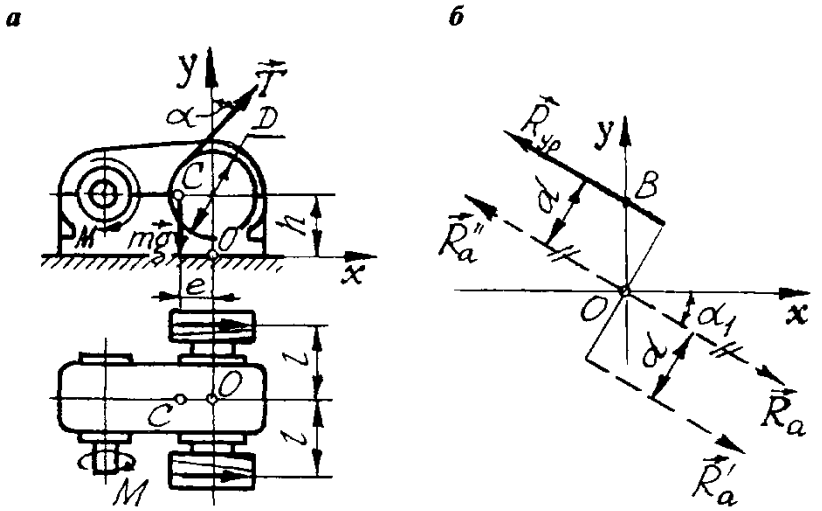


Рис. 4.3

Проекции главного момента M_{aO}активных сил:

$$M_{ax} = 0; \quad M_{ay} = 0; \quad M_{az} = -M + Q\,e - 2T\,(D/2 + h\sin\alpha) =$$
$$= -110 + 800\cdot 0{,}5 - 2\cdot 375\,(1{,}2/2 + \sin 45°) = -690{,}33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Реакции фундамента, уравновешивающие заданную системуактивных сил, также приводятся к силе $R_{ур}$ и паре сил с моментом $M_{ур}$, причем $\vec{R}_{ур} = -\vec{R}_a$ и $\vec{M}_{ур} = -\vec{M}_{aO}$.

Следовательно,

$$R_{ур\,x} = -530{,}33 \text{ кН}; \quad R_{ур\,y} = 269{,}67 \text{ кН}; \quad R_{ур\,z} = 0;$$

модуль $R_{ур} = 534{,}887$ кН;

$$M_{ур\,x} = 0; \quad M_{ур\,y} = 0; \quad M_{ур\,z} = 690{,}33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Векторы $R_{ур}$ и $M_{ур}$ взаимно перпендикулярны, $R_{ур}\cdot M_{ур}=0$,поэтому система приводится к равнодействующей, линия действиякоторойнаходитсявплоскости,перпендикулярной$M_{ур}$,параллельна главному вектору R_aи отстоит от него на расстоянии

$d=|M_{ур}|/R_{ур}$=690,33/534,887=1,291 мтак, что направлениемомента $M_O(R_{ур})$совпадает с направлением главного моментареактивных сил (рис. 4.3, б).

Линия действия равнодействующей проходит через точку Впод углом α_1 коси *Ox*. Ордината точки В

$$y_B = d/\cos\alpha_1 = 1{,}291/\cos(-26°\,57{,}2') = 1{,}301 \text{ м}.$$

Уравнение линии действия: $y=kx+b$, где $k=\operatorname{tg}\alpha_1$, $b=y_в$,следовательно,

$$y = -0{,}5085\,x + 1{,}301 \approx -0{,}51\,x + 1{,}3.$$

*Ответ:*Равнодействующая, проекции которой:

$$R_x = -530{,}3 \text{ кН}; \quad R_y = 269{,}7 \text{ кН}; \quad R_z = 0;$$

уравнение линии действия этой силы: y=-0,51x+1,3 (м).

4.4. Привести к простейшему виду систему сил, действующихна редуктор конвейера (рис. 4.4, а). Система состоит из пары Мна ведущем валу, пары M_2=83кН·м на ведомом валу и силытяжести G=70 кН. Передаточное отношение редуктора *i*=20;КПД η=0,98. Воспользоваться примечанием к задаче 4.1.

а ***б***

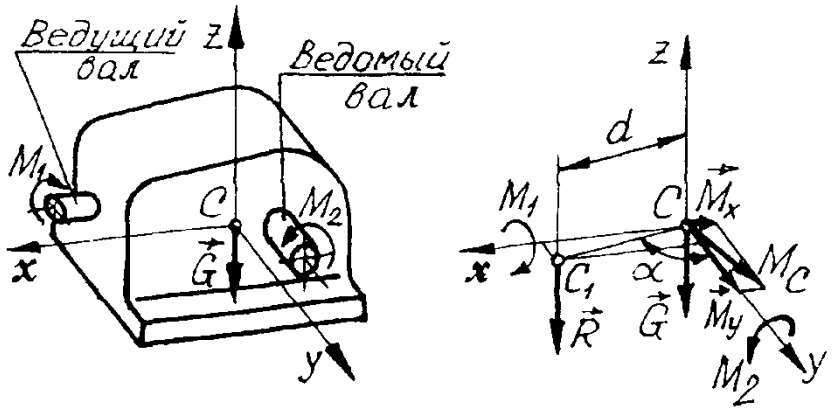


Рис. 4.4

Решение. Выбираем в качестве центра приведения точкуС (начало координат, рис. 4.4, б). Проекции главного вектора R накоординатные оси:

$R_x=0;\ R_y=0;\ R_z=-G$=-70кН; модуль R=70 кН; следовательно, R=G.

Проекции главного момента M_c:

$$M_x = -M_1; \quad M_y = M_2; \quad M_z = 0.$$

Момент на ведущем валу

$$M_1 = M_2/(i\eta) = 83/(20 \cdot 0{,}98) = 4{,}235 \text{ кН}.$$

Модуль главного момента

$$M_C = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-4{,}235)^2 + 83^2 + 0} = 83{,}108 \text{ кН·м}.$$

Вектор $R \uparrow\downarrow C_z$, а вектор M_cлежит в плоскости xCy (см. рис. 4.4,б), следовательно, $R \cdot M_C = 0$ и система приводится к равнодействующей, отстоящей от оси C_zна расстояние $d=CC_1=M_c/R$, причем $CC_1 \perp M_C$.Координаты точки C_1.

$$x = d\sin\alpha = (M_C/R)(M_y/M_C) = M_y/R = 83/70 = 1{,}186 \text{ м};$$

$$y = d\cos\alpha = (M_C/R)(M_x/M_C) = M_x/R = 4{,}235/70 = 0{,}065 \text{ м}.$$

*Ответ:*Равнодействующая R=G, вертикальная линия действия которой пересекает плоскость xCy в точке с координатами x=1,186 м; y=0,065 м.

4.5. Привести к простейшемувиду показанную на рис. 4.5 системуактивных сил, действующих начервячный редуктор; размеры d иh известны.

Решение. В качестве центраприведения выбираем начало Оизображенной на рис. 4.5 системыкоординат.Проекции главноговектораR системы активных сил:

$$R_x = -F; \ R_y = 0; \ R_z = -G;$$

модуль $R=\sqrt{F^2+G^2}$;

проекции главного момента M_O:

$$M_x = M_2; \quad M_y = M_1 - Fh; \quad M_z = Fd.$$

Скалярное произведение

$$\vec{R}\cdot\vec{M}_O = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z =$$
$$= -FM_2 + 0\,(M_1 - Fh) - GFd = -FM_2 - GFd = \text{const} \neq 0,$$

следовательно, система приводится к динаме (силовому винту). Уравнения центральной винтовой оси системы (оси динамы):

$$\frac{R_x}{M_x - yR_z + zR_y} = \frac{R_y}{M_y - zR_x + xR_z} = \frac{R_z}{M_z - xR_y + yR_x}.$$

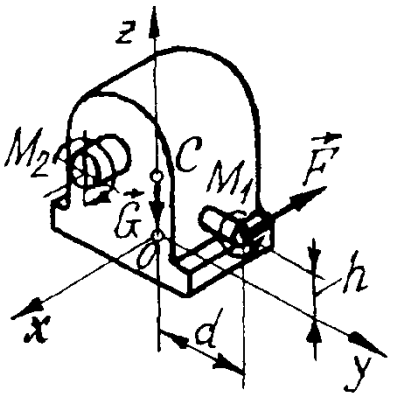


Рис. 4.5

В рассматриваемом случае

$$\frac{-F}{M_2 + yG + 0} = \frac{0}{M_1 - Fh + zF - xG} = \frac{-G}{Fd - 0 - yF},$$

откуда

$$-F(Fd - yF) = -G(M_2 + yG); \quad -F(M_1 - Fh + zF - xG) = 0,$$

или

$$y = (F^2 d - M_2 G)/(G^2 + F^2) = \text{const}; \quad z = (xG + hF - M_1).$$

Поскольку $\vec{R}\cdot\vec{M}_O = \vec{R}\cdot\vec{M} = \text{const}$, то

$$M = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R} = \frac{-FM_2 - GFd}{\sqrt{F^2 + G^2}} = -\frac{F(M_2 + Gd)}{\sqrt{F^2 + G^2}}.$$

Знак "минус" означает, что $\vec{M} \downarrow\uparrow \vec{R}$.

Ответ: Динама, состоящая из силы $\vec{R}$ с проекциями:

$$R_x = -F, \; R_y = 0; \; R_z = -G$$

и пары $M = F(M_2 + Gd)/\sqrt{F^2 + G^2}$, причем $\vec{M} \downarrow\uparrow \vec{R}$.

Уравнения центральной винтовой оси:

$$y = (dF^2 - G\,M_2)/(F^2 + G^2) = \text{const};$$
$$z = (xG + hF - M_1)/F.$$

Практическая работа №5

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Центром параллельных сил называется точка на линиидействия равнодействующей этих сил, положение которой неизменяется, если все силы повернуть вокруг точек ихприложения на одинаковый угол, не нарушая их параллельности и взаимной ориентации. Координаты центра Спараллельных сил определяются по формулам

$$x_C = (\sum x_k F_k)/R;\ y_C = (\sum y_k F_k)/R;\ z_C = (\sum z_k F_k)/R,$$

в которых $x_к$, $y_к$, z_k- координаты точек приложения сил;F_k- алгебраические значения сил, $F_k=\pm|F_k|$; R- равнодействующая системы сил, $R = \sum F_k$.

Центр тяжести тела - это центр параллельных силтяжести всех его материальных частиц. Для твердого тела,находящегося в однородном поле тяжести, положение центратяжести совпадает с положением центра масс, т.е. такойточки Стела, координаты которой определяются формулами

$$x_C = (\sum x_k m_k)/m;\quad y_C = (\sum y_k m_k)/m;\quad z_C = (\sum z_k m_k)/m,$$

где x_k, y_k, z_k- координаты частицы; m_k- ее масса; m- массатела.

Координаты центра тяжести (центра масс):

а)однородного тела

$$x_C = (\sum x_k \Delta V_k)/V;\quad y_C = (\sum y_k \Delta V_k)/V;$$
$$z_C = (\sum z_k \Delta V_k)/V,$$

где ΔV_k- объем частицы; V- объем тела;

б) однородной фигуры (при однородном материале ипостоянной толщине пластинки или оболочки)

$$x_C = (\sum x_k \Delta A_k)/A;\qquad y_C = (\sum y_k \Delta A_k)/A;$$
$$z_C = (\sum z_k \Delta A_k)/A,$$

Если тело, поверхность или линию неудается разбить на конечное число простых элементов,положение центров тяжести которых известно, топримeняются интегральные формулы, легко получаемые изравенств путем перехода к соответствующимпределам.

$$x_C = (\sum x_k \Delta L_k)/L;\quad y_C = (\sum y_k \Delta L_k)/L;$$
$$z_C = (\sum z_k \Delta L_k)/L,$$
$$x_C = S_y/A;\quad y_C = S_x/A;\quad z_C = 0,$$
$$S_x = \sum y_k A_k \text{ и } S_y = \sum x_k A_k$$

5.1. На рис. 5.1,а показана эпюра сил давления гусеницэкскаватора на почву. Длина гусеницы L, равнодействующая силдавления F приложена на расстоянии *е*от середины гусеницы.Определить минимальное и максимальное давления.

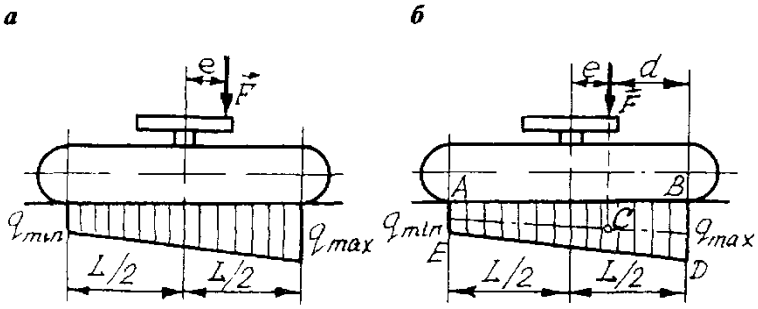


Рис. 5.1

Решение. Равнодействующая сил (рис. 5.1,б), распределенных вдоль отрезка прямой по некоторому закону, по модулюравна площади фигуры ABDE, измеренной в соответствующеммасштабе, и проходит через центр тяжести этой площади [2].Следовательно, центр тяжести C трапеции ABDE находится нарасстоянии e от середины гусеницы. Положение d этого центратяжести определяется формулой (см. табл. 5.1)

$$d = \frac{L}{3}\,\frac{q_{max} + 2q_{min}}{q_{max} + q_{min}} = \frac{L}{2} - e.$$

Модуль равнодействующей $F=L(q_{max}+q_{min})/2$, поэтому

$$q_{max} + q_{min} = 2F/L.$$

Тогда

$$\frac{L}{3}\,\frac{2F/L + q_{min}}{2F/L} = \frac{L}{2} - e,$$

откуда$q_{min}=F(1-6e/L)/L$

Максимальное давление гусениц

$$q_{max} = 2F/L - q_{min} = F(1 + 6e/L)/L.$$

$$\textit{Ответ: } q_{min} = F(1 - 6e/L)/L; \quad q_{max} = F(1 + 6e/L)/L.$$

5.2.На рис. 5.2 показано поперечное сечение корпуса ролика ленточного конвейера. Известны размеры d, D и $O_1O_2=\delta$. Определить положение центра тяжести C сечения.

Решение. Начало координат выберем в центре O_1, тогда ось O_{1x}будетосью симметрии сечения и, следовательно, $y_c=0$. Для вычисления x_cприменяем метод отрицательных площадей. Абсциссы центров тяжести: малого круга (расточки) $x_1=0$, большого круга (ролика) $x_2=O_1O_2=\delta$. Площади: малого круга $\Delta A_1=-\pi d^2/4$ (знак «минус» принят в соответствии с тем,чтоэто - площадьвыреза вфигуре);

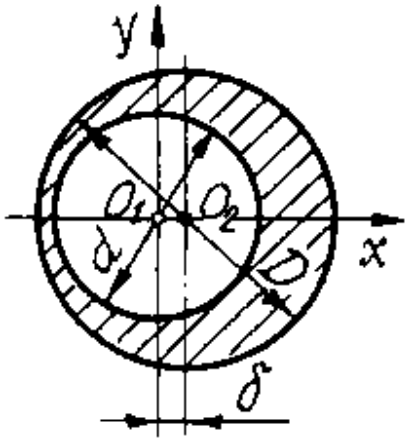


Рис. 5.2

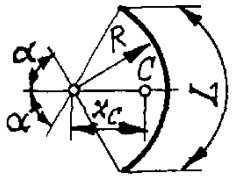
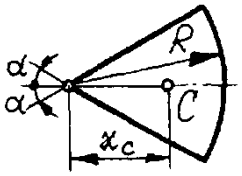
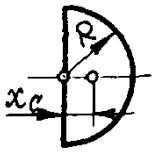
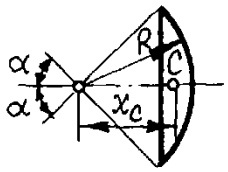
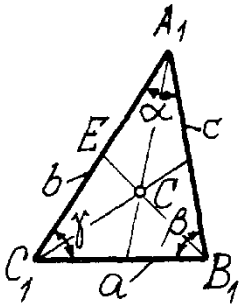
большого круга $\Delta A_2=\pi D^2/4$;сечения$A=\Delta A_1+\Delta A_2=\pi(D^2-d^2)/4$. Абсцисса центра тяжести сечения:

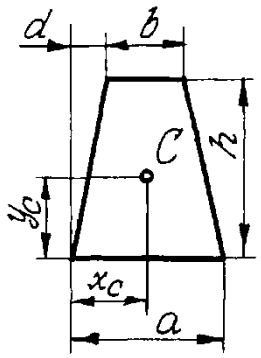
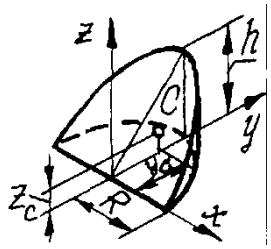
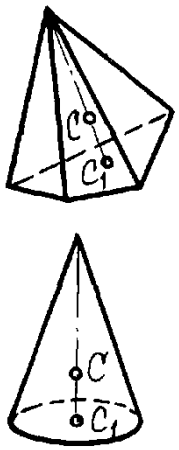
$$x_C = O_1C = (\sum x_k \Delta A_k)/A =$$

$$= [0\,(-\pi d^2/4) + \delta \cdot \pi D^2/4] / [\,\pi (D^2 - d^2)/4] = \delta D^2/(D^2 - d^2).$$

Ответ: $O_1C = \delta D^2/(D^2 - d^2)$.

Таблица 7.1Координаты центров тяжести некоторых однородныхлиний, фигур и тел

Объект	Чертеж	Положение центра тяжести
Дуга окружности(длина L=πRα)		$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_C = 0$, где α - половинацентрального угла, рад.
Круговой сектор (площадь $A=R^2\alpha$)		$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_C = 0$, где α - половина центрального угла, рад.
Полукруг (площадь$A=\pi R^2/2$)		$x_C = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$, $y_C = 0$
Круговой сегмент (площадь $A=(R^2/2)\cdot(2\alpha-\sin 2\alpha)$)		$x_C = \frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}$, $y_C = 0$, где α - половинацентрального угла, рад.
Треугольник (площадь $A=\frac{a^2}{2}\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$ α-угол, противолежащий стороне *a*)		Центр тяжести находитсяв точке пересеченияmедиан: $CE=\frac{1}{3}B_1E$ Если $x_{A1}, y_{A1}, x_{B1}, y_{B1}, x_{C1}, y_{C1}$- координаты вершин треугольника, то $x_C = (x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1})/3$; $y_C = (y_{A_1} + y_{B_1} + y_{C_1})/3$.

Трапеция (площадь $A=\frac{a+b}{2}h$)		Центр тяжести находитсяна прямой, соединяющейсередины параллельных сторон. $x_C=\frac{a+b+d}{3}-\frac{b(a-d)}{3(a+b)};$ $y_C=\frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}$
Цилиндрическая подкова (объем $V=\frac{2}{3}R^2h$)		$x_C=0;$ $y_C=\frac{3}{16}\pi R;$ $z_C=\frac{3}{32}\pi h$
Пирамида (объем $V=\frac{1}{3}Ah,$ А-площадь основания) или прямой круглый конус(объем $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$)		Центр тяжести находится на прямой, соединяющей вершину A_1с центром тяжести C_1основания, $CC_1=\frac{1}{4}A_1C_1$

5.3.Определить положение центра тяжести С поперечногосечения материала, перемещаемого скребковым конвейером; размеры указаны на рис. 5.3, а.

Решение. Ось *Оу*является для заданного сечения осьюсимметрии, следовательно, искомый центр тяжести С лежит наэтой оси, поэтому требуется вычислить только одну координату y_c.

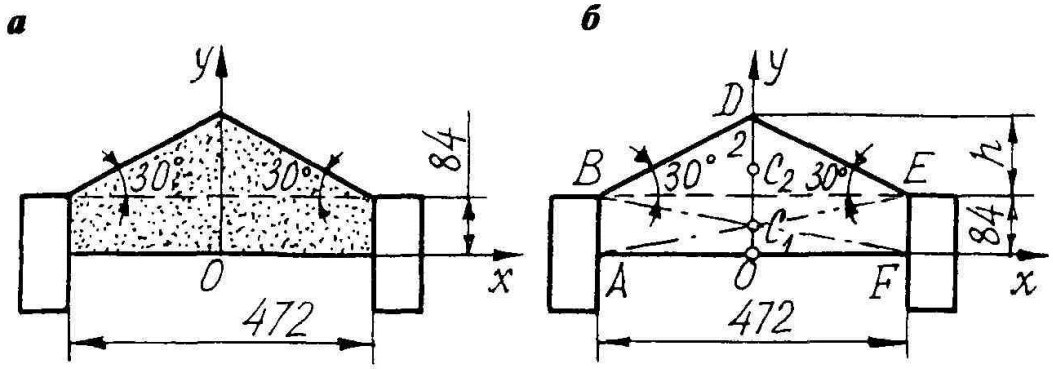


Рис. 5.3

Разобьем сечение на две части: прямоугольник ABEFс центромтяжести C_1и треугольник BDE с центром тяжести C_2 (рис. 5.3, б).Площади этих частей:

$$\Delta A_1 = 472 \cdot 84 = 39\,648 \text{ мм}^2, \quad \Delta A_2 = 0{,}5 \cdot 472\, h = 32\,156{,}1 \text{ мм}^2,$$

где h=0,5·472tg30°=136,255 мм - высота треугольника.Ординаты их центров тяжести:

$$y_1 = 42 \text{ мм}, \quad y_2 = 84 + h/3 = 84 + 136{,}255/3 = 129{,}418 \text{ мм}.$$

Общая площадь сечения:

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = 39\,648 + 32\,156{,}1 = 71\,804{,}1 \text{мм}^2.$$

Искомая ордината центра тяжести сечения:

$$y_C = (y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2)/A =$$

$$= (42 \cdot 39\,648 + 129{,}418 \cdot 32\,156{,}1)/71\,804{,}1 \approx 81{,}15 \text{ мм}.$$

Ответ: $y_C = 81{,}15$ мм.

5.4. Решить предыдущуюзадачу для конвейера с дополнительным бортом; размерыуказаны на рис. 5.4, а.

Решение. Проведемвспомогательные прямые GDи ED и представим площадьрассматриваемогосеченияматериала какразность площадей фигуры OABDGKO и треугольника GED (рис. 5.4, б).

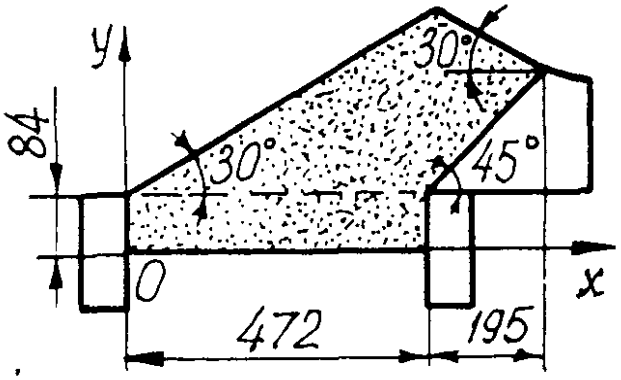


Рис. 5.4, а

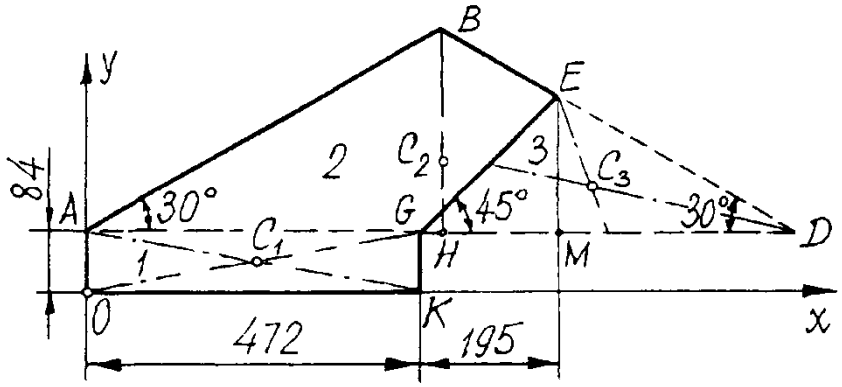


Рис. 5.4, б

Разбив, в свою очередь, фигуру OABDGKO на прямоугольникOAGK и равнобедренный треугольник ABD и обозначив ихсоответственно цифрами 1 и 2, а треугольник GED - цифрой 3,находим координаты центра тяжести сечения,которые в данном случае имеют вид

$$x_C = \frac{x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + x_3 \Delta A_3}{A}; \quad y_C = \frac{y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + y_3 \Delta A_3}{A}.$$

Определим значения параметров, входящих в эти формулы:

$$x_1 = OK / 2 = 236 \text{ мм}; \quad y_1 = OA / 2 = 42 \text{ мм};$$
$$\Delta A_1 = OK \cdot OA = 472 \cdot 84 = 39\,648 \text{ мм}^2.$$

Поскольку высота BH является одновременно и осью симметрии треугольника ABD, то

$$x_2 = AH = (AG + GM + MD) / 2 = (AG + GM + EM \operatorname{ctg} 30°) / 2 =$$
$$= (472 + 195 + 195 \operatorname{ctg} 30°) / 2 = 502{,}375 \text{ мм};$$
$$y_2 = OA + BH / 3 = OA + (AH \operatorname{tg} 30°) / 3 =$$
$$= 84 + (502{,}375 \operatorname{tg} 30°) / 3 = 180{,}682 \text{ мм (см. табл. 7.1)};$$
$$\Delta A_2 = 0{,}5\, AD \cdot BH = AH \cdot BH = AH \cdot AH \operatorname{tg} 30° = AH^2 \operatorname{tg} 30° =$$
$$= 502{,}375^2 \operatorname{tg} 30° = 145\,712 \text{ мм}^2.$$

Для треугольника GED:

$$x_3 = (x_G + x_E + x_D) / 3 = [AG + (AG + GM) + 2\,AH] / 3 =$$
$$= (472 + 472 + 195 + 2 \cdot 502{,}375) / 3 = 714{,}583 \text{ мм (см. табл. 7.1)};$$
$$y_3 = (y_G + y_E + y_D) / 3 = [OA + (OA + EM) + OA] / 3 =$$
$$= (84 + 84 + 195 + 84) / 3 = 149 \text{ мм (см. табл. 7.1)};$$
$$\Delta A_3 = -0{,}5\, GD \cdot EM = -0{,}5\,(2\,AH - AG)\, EM =$$
$$= -0{,}5\,(2 \cdot 502{,}375 - 472)\, 195 = -51\,943{,}11 \text{ мм}^2$$

(знак «минус» означает, что площадь треугольника GED в действительном поперечном сечении материала отсутствует).

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 =$$
$$= 39\,648 + 145\,712 + (-51\,943{,}11) = 133\,416{,}89 \text{ мм}^2.$$

Подставляя найденные значения в формулы для координатцентра тяжести сечения, имеем

$$x_C = (236 \cdot 39\,648 + 502{,}375 \cdot 145\,712 -$$
$$- 714{,}583 \cdot 51\,943{,}115) / 133\,416{,}89 = 340{,}596 \text{ мм};$$
$$y_C = (42 \cdot 39\,648 + 180{,}682 \cdot 145\,712 -$$
$$- 149 \quad 51\,943{,}115) / 133\,416{,}89 = 151{,}804 \text{ мм}.$$

Ответ: $x_C \approx 340{,}6$ мм; $y_C \approx 151{,}8$ мм.

5.5. Определить координаты центра тяжести передней стенкикузова шахтной вагонетки (рис. 5.5, а) при заданных размерах*b*=0,46 м и *a*=0,4 м.

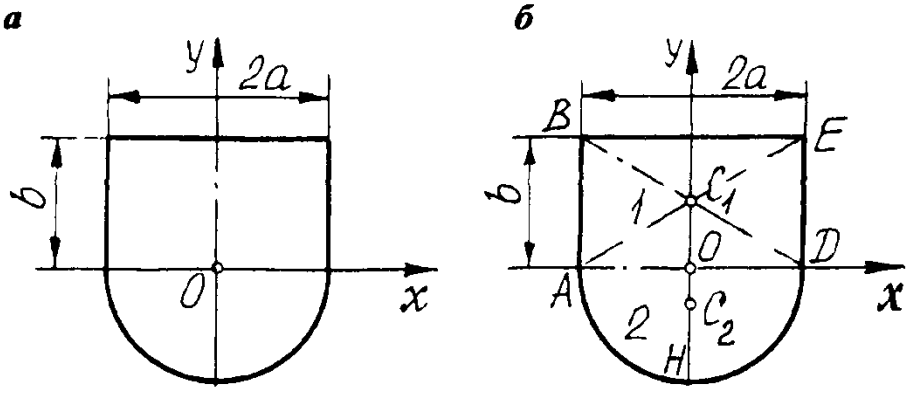


Рис. 5.5

Решение. Центр тяжести стенки вагонетки лежит наявляющейся осью симметрии координатной оси y, т.е.$x_c=0$.

Разделим с помощью вспомогательной линии AD площадьстенки на две части (рис. 5.5, б) - прямоугольник ABED, обозначенный цифрой 1, и полукруг ADH, обозначенный цифрой 2. Центртяжести C_1прямоугольника лежит на пересечении диагоналей, акоординату y_2центра тяжести C_2полукруга определяем поформуле из табл. 5.1.

На основании формулы искомая ордината центра тяжестистенки вагонетки:

$$y_C = (y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2) / A,$$

где $y_1 = b/2$; $\Delta A_1 = 2ab$; $y_2 = -4a/(3\pi)$; $\Delta A_2 = \pi a^2/2$;

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = 2ab + \pi a^2/2.$$

Следовательно,

$$y_C = \{(b/2)\,2ab + [-4a/(3\pi)](\pi a^2/2)\} / (2ab + \pi a^2/2) =$$

$$= (b^2 - 2a^2/3) / (2b + \pi a/2) =$$

$$= (0{,}46^2 - 2\,0{,}4^2/3) / (2\,0{,}46 + \pi\,0{,}4/2) = 0{,}0678 \text{ м}.$$

Ответ: $x_C = 0$; $y_C \approx 0{,}068$ м.

КИНЕМАТИКА

Практическая работа №6
КИНЕМАТИКАТОЧКИ

Для решения задач кинематики точки (тела) нужно, прежде всего, знать закон движения этой точки (тела), т.е. положение точки (тела) относительно некоторой системы отсчета в любой момент заданного диапазона времени.

Движение точки может быть задано векторным, координатным или естественным способом.

При векторном способе задания движения положение точки в пространстве в любой момент времени задается с помощью вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где r - проведенный из начала координат О в данную точку Мрадиус-вектор, величина и направление которого с течением времени изменяются по величине и направлению, т.е. зависят от аргумента t.

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Направлен вектор v по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Вектор ускорения точки равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Вектор ускорения aлежит в плоскости, соприкасающейся с кривой в данной точке М, и направлен в сторону вогнутости кривой. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плокостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

Уравнения движения точки при координатном способе задания движения представляют собой зависимости координат этой точки от времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

В этом случае проекции векторов скорости и ускорения точки на координатные оси определяются по формулам

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z};$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\}$$

Модули векторов v и a:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Естественным способом задания движения пользуются в том случае, когда траектория движущейся точки известна заранее. Тогда задаются началом отсчета О на траектории, положительным и отрицательным направлением отсчета и законом движения точки вдоль траектории:

$$s=f(t)$$

где s- дуговая координата точки, равная расстоянию от точки О до точки М, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. Отметим, что координата s в общем случае не равна перемещению точки за время t, так как точка за этот промежуток времени могла двигаться сначала в одном направлении, а затем - в обратном, поэтому пройденный ею путь равен сумме перемещений в обоих направлениях, а координата s- разности этих перемещений.

Для вычисления скорости и ускорения точки Мпри естественном способе задания ее движения используют формулы

$$v = ds/dt = \dot{s};$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;\ \ a_n = v^2/\rho;\ \ a_\tau = \dot{v} = \ddot{s};\ \ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где s- дуговая координата точки, заданная как функция времени;

ρ -радиус кривизны траектории;

a_n и a_τ - нормальное и тангенциальное (касательное) ускорения, которые также можно определить по формулам

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v;$$

$$a_\tau = (\vec{v} \cdot \vec{a})/v.$$

Если точка движется в плоскости, то в соответствии с этими формулами имеем

$$a_n = |\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}|/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};$$

$$a_\tau = (\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y})/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Если $v>0$, то скорость направлена в сторону положительного отсчета координаты s. Направление касательного ускорения a_τ зависит от знака проекции a_τ.

Криволинейное движение точки называется равномерным, если числовое значение скорости все время остается постоянным. При этом $a_\tau=dv/dt=0$ и полное ускорение aточки равно одному только нормальному ускорению a_n.

Закон равномерного криволинейного движения имеет вид

$$s = s_0 + vt.$$

Если касательное ускорение все время остается постоянным ($a_\tau=dv/dt=const$), то такое движение называется равнопеременным. Если при этом $\alpha_\tau>0$, то модуль скорости возрастает и движение называется равноускоренным, а если $a_\tau<0$, то модуль скорости убывает и движение называется равнозамедленным.

Закон равнопеременного криволинейного движения

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2,$$

скорость такого движения

$$v = v_0 + a_\tau t.$$

Эти три последние формулы соответствуют также законам равномерного или равнопеременного прямолинейного движения точки, если считать $s=x$и $a_\tau=a$(a-ускорение точки).

1. Прямолинейное движение точки

6.l. Разгон подъемного сосуда состоит из двух этапов: движения с постоянным ускорением a_1в течение времени t_1из состояния покоя и дальнейшего движения с постоянным ускорением a_2=0,8 м/с^2 в течение времени t_2до достижения максимальной скорости v_2=5,2 м/с (рис. 6.1). Путь h_1за время t_1равен 2 м, полное время разгона t=8 с. Определить величины t_1, v_1(скорость в конце первого этапа), a_1, t_2, h_2 (перемещение сосуда за время t_2).

Решение. Начальная скорость v_{10}сосуда на первом этапе равна нулю, так как движение начинается из состояния покоя, а ускорение постоянно, следовательно, скорость сосуда нарастает по закону $v_1=a_1t_i$, ($0<t_i<t_1$) и в конце этапа составляет величину $v_1=a_1t_1$. Перемещение сосуда за время t_1при равноускоренном движении при v_o=0 и s_0=0]

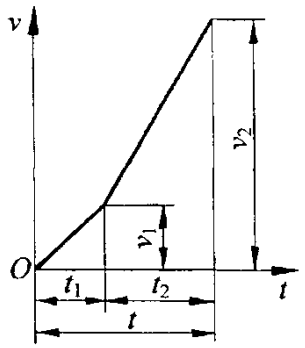


Рис. 6.1

$$h_1 = a_1 t_1^2 / 2. \qquad (1)$$

На втором этапе (при $t_1<t_i<t$) движение тоже равноускоренное, но $v_{II0}\neq0$, следовательно,

$$v_{II} = v_{II\,(0)} + a_2(t_i - t_1).$$

В соответствии с графиком скорости (см. рис. 6.1) начальная скорость на втором этапе равна конечной скорости первого этапа, т.е.$v_{II0}=v_1$поэтому в конце второго этапа, когда t_i-t,

$$v_2 = v_1 + a_2(t - t_1) = a_1 t_1 + a_2(t - t_1). \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим $a_1t_1=2h_1/t_1$и подставляем в уравнение (2):

откуда

$$v_2 = 2 h_1 / t_1 + a_2(t - t_1),$$

$$a_2 t_1^2 - (a_2 t - v_2) t_1 - 2h_1 = 0. \qquad (3)$$

Решая уравнение (3) и исключая отрицательное значение t_1как неудовлетворительное, получаем

$$t_1 = \frac{a_2 t - v_2 + \sqrt{(a_2 t - v_2)^2 + 8 h_1 a_2}}{2a_2} =$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 8 - 5{,}2 + \sqrt{(0{,}8 \cdot 8 - 5{,}2)^2 + 8 \cdot 2 \cdot 0{,}8}}{2 \cdot 0{,}8} \approx 3{,}11 \text{ с}.$$

Теперь из формулы (1) находим ускорение сосуда на первом этапе разгона:

$$a_1 = \frac{2h_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 2}{3{,}11^2} \approx 0{,}414 \text{ м/с}^2.$$

Скорость в конце первого этапа, когда $t_i = t_1$,

$$v_1 = a_1 t_1 = 0{,}414 \cdot 3{,}11 \approx 1{,}29 \text{ м/с}.$$

Продолжительность второго этапа:

$$t_2 = t - t_1 = 8 - 3{,}11 = 4{,}89 \text{ с}.$$

Перемещение сосуда за время hпри равноускоренном движении с ускорением a_2:

$$h_2 = v_{\text{II}(0)} t_2 + a_2 t_2^2/2 = v_1 t_2 + a_2 t_2^2/2 =$$
$$= 1{,}29 \cdot 4{,}89 + 0{,}8 \cdot 4{,}89^2/2 \approx 15{,}87 \text{ м}.$$

Ответ: $t_1 \approx 3{,}11$ с; $v_1 \approx 1{,}29$ м/с; $a_1 \approx 0{,}414$ м/с^2;
$t_2 = 4{,}89$ с; $h_2 \approx 15{,}87$ м.

6.2. На расстоянии 42,8 м от верхней приемной площадки начинается торможение шахтной клети, движущейся со скоростью v_1=10 м/с. Период торможения состоит из двух этапов: движения с постоянным замедлением a=1,2 м/с^2 и равномерного движения (дотягивания) со скоростью v_2=0,5 м/с (рис. 6.2). Определить полное время торможения и (до остановки клети).

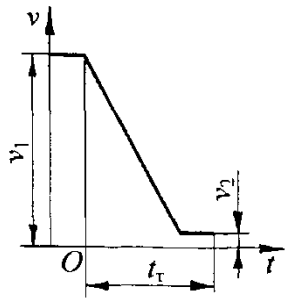


Рис. 6.2

Решение. На первом этапе при равнозамедленном движении скорость изменяется по закону, поэтому время движения (с) на этом этапе

$$t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a}.$$

За это время клеть пройдет расстояние

$$s_1 = v_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} = t_1 \left(v_1 + \frac{a t_1}{2} \right) = t_1 \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} \right) = t_1 \frac{v_2 + v_1}{2} =$$

$$= \frac{v_2 - v_1}{a} \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Время второго этапа (дотягивания на расстояние s_2 с постоянной скоростью v_2)

$$t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{s-s_1}{v_2}=\frac{1}{v_2}\left(s-\frac{v_2^2-v_1^2}{2a}\right).$$

Полное время торможения

$$t_т=t_1+t_2=\frac{v_2-v_1}{a}+\frac{1}{v_2}\left(s-\frac{v_2^2-v_1^2}{2a}\right)=$$

$$=\frac{0,5-10}{-1,2}+\frac{1}{0,5}\left[42,8-\frac{0,5^2-10^2}{2(-1,2)}\right]=10,392\approx 10,4\text{ с}.$$

Ответ: $t_т\approx 10,4$ с.

6.3. Ускорение клети в зависимости от времени t выражается формулой $a=a_0(1-\sin[\pi t/(2t_1)])$, где a_0 и t_1- постоянные. Найти уравнения скорости и пути, зная, что $v_o=0$, а также выяснить механическое значение величин a_0 и t_1и выразить t_1через максимальную скорость подъема. После ближайшего момента времени, для которого $a=0$, подъем клети происходит равномерно.

Решение. Анализируя заданную функцию $a=f(t)$, находим, что при $t=0$ ускорение $a=a_0$, следовательно, a_0-начальное значение ускорения клети; при $t=t_1$ускорение $a=a_0(1-\sin[\pi t_1/(2t_1)])=a_0(1-\sin(\pi/2))=0$, т.е. в этот момент заканчивается разгон и дальнейший подъем клети происходит равномерно, значит, t_1- время ускоренного движения.

Из условий имеем$a=dv/dt$,откуда $dv=adt$.

Поскольку при

$$t=0\ \ v=0,\ \text{то}\ \int_0^v dv=\int_0^t a\,dt,$$

или

$$v=a_0\int_0^t\left(1-\sin\frac{\pi t}{2t_1}\right)dt=a_0\left(t+\frac{2t_1}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2t_1}\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=a_0\left(t+\frac{2t_1}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2t_1}-0-\frac{2t_1}{\pi}\cos 0\right)=a_0\left[t-\frac{2t_1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi t}{2t_1}\right)\right].$$

Уравнение пути определяем из условия: v=ds/dt,откудаds=vdt. Поскольку при t=0,s=0, то $\int_0^s ds=\int_0^t v\,dt$, или

$$s=a_0\int_0^t\left[t-\frac{2t_1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi t}{2t_1}\right)\right]dt=a_0\left[\frac{t^2}{2}-\frac{2t_1}{\pi}\left(t-\frac{2t_1}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2t_1}\right)\right]\Bigg|_0^t=$$

$$=a_0\left[\frac{t^2}{2}-\frac{2t_1}{\pi}\left(t-\frac{2t_1}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2t_1}\right)\right].$$

Максимальная величина скорости достигается при $t=t_1$, так как в период разгона ускорение все время остается положительным (a≥0), ибо $0\le\sin[\pi t/(2t_i)]\le 1$. Следовательно,

$$v_{max} = a_0\left[t_1 - \frac{2t_1}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi t_1}{2t_1}\right)\right] = a_0 t_1\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$

откуда $$t_1 = \frac{\pi v_{max}}{a_0(\pi - 2)} \approx 2{,}752\frac{v_{max}}{a_0}.$$

Ответ: $v = a_0\{t - (2t_1/\pi)[1 - \cos(0{,}5\pi t/t_1)]\}$;
$s = a_0\{t^2/2 - (2t_1/\pi)[t - (2t_1/\pi)\sin(0{,}5\pi t/t_1)]\}$;
a_0 – начальное ускорение клети;
$t_1 = \pi v_{max}/[a_0(\pi - 2)] \approx 2{,}75 v_{max}/a_0$ – время ускоренного движения.

2. Криволинейное движение точки

6.4. Лента конвейера движетсясо скоростью ν под углом α к горизонту, огибая барабан радиусом R (рис.6.4). Кусок угля, принимаемый за материальную точку М, отрывается отленты в положении M_oи далее совершает свободное падение. Определитьрадиус ρ кривизны траектории свободного падения в начальной точке M_o.Найти условие отрыва куска. Толщинойленты и сопротивлением воздуха пренебречь.

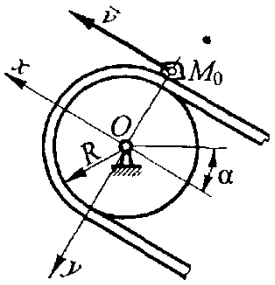


Рис. 6.4

Решение. В момент отрыва куска вектор ν его скорости направлен по касательной к внешней окружности барабана с лентой, т.е. параллельно прямолинейному участку ленты.

Проекции этого вектора на оси *xOy*:

$$v_x = v; \quad v_y = 0.$$

Дальнейшее движение точки Мпредставляет собой свободное падение и поэтому происходит с ускорением g силы тяжести; проекции этого ускорения на те же оси:

$$a_x = -g\sin\alpha; \quad a_y = g\cos\alpha.$$

Нормальное ускорение в точке отрыва определяем по формуле:

$$a_n = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v} = \frac{|vg\cos\alpha - 0\cdot g\sin\alpha|}{v} = g\cos\alpha.$$

Радиус кривизны траектории в точке M_0находим из второй формулы:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g\cos\alpha}.$$

При отрыве куска угля от ленты радиус ρ кривизны траектории полета куска больше радиуса R внешней окружности ленты, огибающей барабан. Следовательно,

условие отрыва куска:

$$\rho > R, \quad \text{или} \quad v^2 > g R \cos\alpha.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{v^2}{g\cos\alpha}$,

где g- ускорение свободного падения.

Условиеотрыва: ρ>R, или v^2>gRcosα.

6.5. Используя условие и ответ задачи 6.4, составить уравнение свободного падения материальной точки М в осях *Oxy*и определить условия, при которых эта точка не упадет на барабан.

Решение. Движение происходит с постоянным по величине и направлению ускорением свободного падения; проекции этого ускорения на оси координат:

$$a_x = -g\sin\alpha = \text{const}; \quad a_y = g\cos\alpha = \text{const},$$

следовательно, вдоль оси Ох точка движется равнозамедленно, а вдоль оси Оу -равноускоренно. Обращаем внимание на то, что отмеченное выше постоянство величины и направления ускорения точки и его проекций не означает, что движение точки вдоль ее параболической траектории является равнопеременным, так как условием равнопеременного движения является не $a=const$,а$\alpha_\tau=const$.В рассматриваемом случае касательное ускорение точки не является постоянным, в чем можно убедиться, если воспользоваться формулой. Проекции начальной скорости:

$$v_{x0} = v; \quad v_{y0} = 0.$$

Поскольку движение точки вдоль обеих осей координат является равнопеременным, то уравнения движения в проекциях на эти оси определяем по формуле, учитывая, что при $t=0$

x_o=0, а y_0=-R:

$$x = x_0 + v_{x0}t + a_x t^2/2 = 0 + vt + (-g\sin\alpha)t^2/2 = vt - (gt^2/2)\sin\alpha;$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + a_y t^2/2 = -R + 0\cdot t + (g\cos\alpha)t^2/2 = (gt^2/2)\cos\alpha - R.$$

Определим теперь условия, при которых точка упадет на барабан.

Очевидно, что прежде чем упасть на барабан, точка должна сначала оторваться от него, иначе никакого падения не будет. Как показано в решении предыдущей задачи, отрыв происходит при $v^2>gRcos\alpha$, т.е. при $cos\alpha<v^2/(gR)$.

После отрыва точки от барабана ее траектория не должна пересечь внешнюю окружность барабана с лентой, поэтому расстояниеrот начала координат до точки, равное $\sqrt{x^2+y^2}$,должно быть больше R в любой момент времени.

Чтобы пересечение (или касание) стало возможным, нужно иметь $r\le R$. Оба этих параметра существенно положительны, поэтому справедливо и неравенство $r^2<R^2$, или $x^2+y^2<R^2$. Подставляя в это неравенство значения xи yиз уравнений движения куска, получаем

$$v^2t^2 - vgt^3\sin\alpha + \frac{g^2t^4}{4}\sin^2\alpha + \frac{g^2t^4}{4}\cos^2\alpha - gRt^2\cos\alpha + R^2 \le R^2,$$

или

$$\frac{g^2t^2}{4} - vgt\sin\alpha + v^2 - gR\cos\alpha \le 0,$$

Откуда

$$t = \frac{vg\sin\alpha \pm \sqrt{(vg\sin\alpha)^2 - 4\frac{g^2}{4}(v^2 - gR\cos\alpha)}}{2\frac{g^2}{4}} =$$

$$= \frac{2}{g}\left(v\sin\alpha \pm \sqrt{gR\cos\alpha - v^2\cos^2\alpha}\right).$$

Корни уравнения будут действительными, если

$$gR\cos\alpha - v^2\cos^2\alpha > 0.$$

Поскольку cosα>0, так как0<α<90°,то, разделив полученное неравенство на cosα, получаем$gR\text{-}v^2cos\alpha>0 и cos\alpha<gR/v^2$. Последнее неравенство является условием падения куска на барабан. А чтобы падения на барабан не было, нужно, наоборот, иметь $cos\alpha>gR/v^2$. Окончательно условия, при которых точка не упадет на барабан, приобретают вид

$$v^2/(gR) > \cos\alpha > gR/v^2.$$

Ответ: $x = vt - \frac{gt^2}{2}\sin\alpha$; $y = \frac{gt^2}{2}\cos\alpha - R$;

$v^2/(gR) > \cos\alpha > gR/v^2$.

6.6. На каком расстоянии l от конвейера необходимо устано вить углеотбойный щит (рис. 6.6), чтобы кусок угля, отры вающийся от конвейера со скоро стью v_0=3 м/с под углом 10° к горизонту, ударился о щит на расстоянии h=1 м ниже места выле та. Определить скорость v_1кускаугля в момент удара.

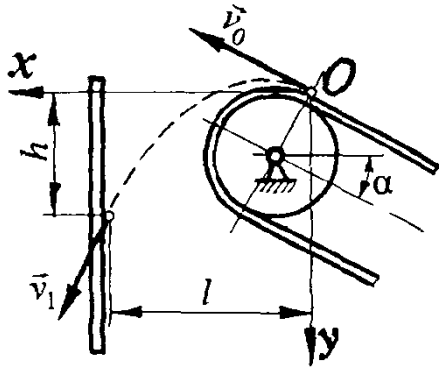


Рис 6.6

Решение. Совмещаем начало координат О системы *xOy*с положением куска угля в момент отрыва этого куска от ленты конвейера (рис. 6.6), направляя оси координат так, как показано на рисунке. После отрыва кусок совершает свободное падение при начальной скорости v_0.

Начальные координаты куска угля:

$$x_0 = y_0 = 0;$$

проекции его начальной скорости на оси координат:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = -v_0 \sin\alpha;$$

проекции ускорения:

$$a_x = 0; \quad a_y = g.$$

Отсюда видно, что вдоль оси Ох исследуемая точка (кусок угля) движется равномерно, а вдоль оси Оу - равноускоренно.

Уравнения для определения проекций скорости и ее полной величины в произвольный момент времени получаем на основе формул:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_y = v_{0y} + a_y t = -v_0 \sin\alpha + gt;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-v_0 \sin\alpha + gt)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2 t^2}.$$

Уравнения движения точки в соответствии с формулами:

$$x = v_0 t \cos\alpha; \qquad y = -v_0 t \sin\alpha + g t^2 / 2$$

Чтобы найти время и движения точки до удара, в последнее уравнение подставляем $y=h$.

$$h = -v_0 t_1 \sin\alpha + g t_1^2 / 2,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 4(g/2)(-h)}}{2(g/2)} =$$

$$= \frac{3\sin 10^\circ + \sqrt{(3\sin 10^\circ)^2 - 4(9{,}81/2)(-1)}}{2(9{,}81/2)} \approx 0{,}508 \text{ с}.$$

Зная время t_1, можно определить расстояние l до углеотбойного щита и скорость v_1 куска в момент удара о щит:

$$l = x_1 = v_0 t_1 \cos\alpha = 3 \cdot 0{,}508 \cos 10^\circ = 1{,}5 \text{ м};$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_1 \sin\alpha + g^2 t_1^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}508 \sin 10^\circ + 9{,}81^2 \cdot 0{,}508^2} \approx 5{,}35 \text{ м/с}.$$

Ответ: $l = 1{,}5$ м; $v_1 \approx 5{,}35$ м/с.

Практическая работа №7
ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА.

Угловая скорость тела

$$\omega = \dot{\varphi},$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

где φ - угловая координата тела, заданная как функция времени.

При равнопеременном вращении, когда угловое ускорение тела в течение некоторого периода времени *t* остается постоянным, угловая скорость

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

а угол поворота (закон движения)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2,$$

где φ_o и ω_o- начальные значения соответственно угла поворота и угловой скорости.

Если известны начальное (ω_o) и конечное ($\omega_к$) значения угловой скорости равнопеременного вращения в течение времени *t*, то угол поворота тела за этот период времени можно найти, исключив из 3 и 4 формул параметр *t*и полагая φ_o=0:

$$\varphi = \frac{\omega_к^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

Скорость и ускорение точки тела, расположенной на расстоянии *R*от оси вращения:

$$v = \omega R;$$

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Вектор *a*составляет с радиусом *R*угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}(|\varepsilon| / \omega^2),$$

одинаковый для всех точек тела.

7.1. Производительность ленточного конвейера Q=4800 т/ч, площадь поперечного сечения грунта на ленте A=0,2 м , насыпная плотность груза γ=1,6 т/м, диаметр приводного барабана D=1 м. Определить частоту вращения (число и оборотов в минуту) барабана.

Решение. Считаем, что перемещение груза ленточным конвейером производится непрерывно, а поперечное сечение грунта на грузонесущем органе (ленте) остается примерно постоянным по всей длине конвейера и все время его работы. Тогда линейная плотность *q*(кг/м) грунта на ленте, т.е. масса грунта, приходящаяся на 1 м длины ленты, равна

$$q = (A\ 1)\,\gamma \cdot 1000 = 1000\,A\gamma.$$

Производительность Q (т/ч) транспортной машины непрерывного действия зависит от массы груза *q*на единице длины грузонесущего органа и рабочей скорости ν (м/с) последнего:

$$Q = \frac{3600\,qv}{1000} = 3600\,Av\gamma.$$

Полагая, что лента не проскальзывает по приводному барабану, находим ее скорость v (м/с) при частоте вращения барабана n(мин$^{-1}$) и его диаметре D (м):

$$v = \omega D / 2 = (\pi n / 30)\, D / 2 = \pi D n / 60,$$

где ω - угловая скорость барабана, с$^{-1}$.

Тогда производительность конвейера

$$Q = 60 A \pi D n \gamma,$$

откуда

$$n = \frac{Q}{60 A \pi D \gamma} \approx \frac{5{,}3 \cdot 10^{-3} Q}{AD\gamma} = \frac{5{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 4800}{0{,}2 \cdot 1 \cdot 1{,}6} \approx 79{,}6 \text{ мин}^{-1}.$$

Ответ: $n \approx 5{,}3 \cdot 10^{-3} Q / (AD\gamma) \approx 79{,}6$ мин$^{-1}$.

7.2. Лента конвейера, движущаяся со скоростью v=4 м/с, опирается на ролик диаметром D=160 мм (рис. 7.2). Определить ускорение центра масс ролика - точки С, расстояние которой до оси вращения l_{OC}=1,2 мм. Проскальзывание ленты по ролику отсутствует.

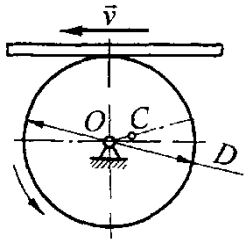


Рис. 7.2

Решение. При отсутствии проскальзывания ленты по ролику ее скорость равна окружной скорости точки на поверхности ролика, поэтому угловая скорость ролика

$$\omega = \frac{2v}{D}.$$

Поскольку скорость ленты постоянна, то угловая скорость ролика тоже постоянна, его угловое ускорение равно нулю, а значит, равно нулю и тангенциальное ускорение принадлежащей ролику точки С. Следовательно, полное ускорение точки С равно нормальному ее ускорению:

$$a_C = a^n_{CO} = \omega^2 l_{OC} = \left(\frac{2v}{D}\right)^2 l_{OC} = \left(\frac{2 \cdot 4}{160 \cdot 10^{-3}}\right)^2 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: a_c=3 м/с^2.

7.3. На вращающемся рабочеморгане проходческого комбайна по концентрическим окружностям расположены режущие инструменты (зубки). Расстояние между окружно стями A=200 мм. Скорости резания: v_i=1,6м/с и v_2=1,4м/с. Определить частоту вращения и и диаметр D рабочего органа.

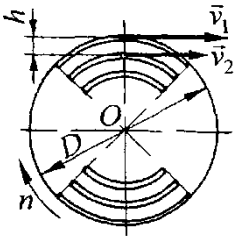


Рис. 7.3

Решение. Обозначим диаметр окружности, на которой расположены зубки, имеющие скорость v_2, через D_2. Расстояние hмежду окружностями равно разности их радиусов, поэтому

$$D_2 = D - 2h.$$

Угловая скорость рабочего органа

$$\omega = \frac{v_1}{D/2} = \frac{v_2}{D_2/2},$$

поэтому

$$\frac{v_1}{D} = \frac{v_2}{D-2h},$$

откуда

$$D = \frac{2v_1 h}{v_1 - v_2} = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 - 1{,}4} = 3{,}2 \text{ м}.$$

Частота вращения рабочего органа

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi}\frac{v_1}{D/2} = \frac{30}{\pi}\frac{1{,}6}{3{,}2/2} = 9{,}549 \text{ мин}^{-1}.$$

Ответ:n=9,55 мин$^{-1}$; D=3,2 м.

7.4. Отношение скоростей точек А и В (скоростей резания) зубков фрезы проходческого комбайна v_A/v_B=1,2; угловая скорость вращения фрезы ω=11 с$^{-1}$; шаг h=120 мм; угол α=36°. Определить скорости указанных точек и диаметр D.

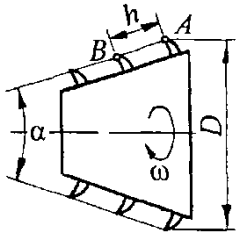


Рис. 7.4

Решение. Скорости точек вращающегося твердого тела пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения, следовательно, соотношение этих скоростей равно соотношению радиусов траекторий точек, т.е. радиусов (или диаметров) соответствующих окружностей:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{D}{D_B} = 1{,}2,$$

где D_B- диаметр траектории точки В.

Из схемы фрезы, приведенной на рис. 7.4, видно, что

$$D = D_B + 2h \sin \alpha/2,$$

следовательно,

$$D = \frac{D}{1{,}2} + 2h\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$D = \frac{2{,}4\,h\sin(\alpha/2)}{1{,}2-1} = \frac{2{,}4\cdot 120\sin(36°/2)}{1{,}2-1} \approx 445\ \text{мм}.$$

Теперь можно найти скорости точек A и B:

$$v_A = \omega D/2 = 11\cdot 445\cdot 10^{-3}/2 \approx 2{,}45\ \text{м/с};$$

$$v_B = v_A/1{,}2 = 2{,}45/1{,}2 \approx 2{,}04\ \text{м/с}.$$

Ответ: $v_A \approx 2{,}45$ м/с; $v_B \approx 2{,}04$ м/с; $D \approx 445$ мм.

7.5. Цикл движения поворотной платформы экскаватора состоит из двух этапов: разгона с постоянным угловым ускорениемε_1=0,15 c^{-2} и торможения с постоянным угловым замедлением ε_2=0,1 c^{-2}. Угол поворота платформы за время цикла $\varphi=\pi/3$. Определить максимальную угловую скорость ω_1 платформы, время t_1и t_2каждого этапа, а также максимальное ускорение aцентра тяжести ковша экскаватора, если расстояние R от этого центра до оси вращенияравно 10,5 м.

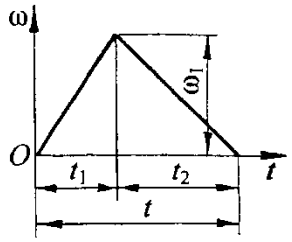


Рис. 7.5

Решение. Воспользовавшись формулой, приведенной в начале данной практической работы для определения угла поворота тела при равнопеременном движении, и учитывая, что на первом этапе $\omega_{K(I)}=\omega_1$, $\omega_{0(I)}=0$, $\varepsilon_{(I)}=\varepsilon_1$, находим угол φ_1 поворота платформы за время t_1.

$$\varphi_I = \frac{\omega_{к(I)}^2 - \omega_{0(I)}^2}{2\varepsilon_{(I)}} = \frac{\omega_1^2}{2\varepsilon_1}.$$

На втором этапе $\omega_{K(II)}=0$, $\omega_{0(II)}=\omega_1$, $\varepsilon_{(II)}=-\varepsilon_2$ (движение равнозамедленное), угол φ_{II} поворота платформы отсчитывается от ее конечного положения, достигнутого на первом этапе. Тогда

$$\varphi_{II} = \frac{\omega_{к(II)}^2 - \omega_{0(II)}^2}{2\varepsilon_{(II)}} = \frac{\omega_1^2}{2\varepsilon_2}.$$

Суммарный угол поворота платформы за время цикла:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = \frac{\omega_1^2}{2\varepsilon_1} + \frac{\omega_1^2}{2\varepsilon_2} = \frac{\omega_1^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_2},$$

откуда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\varphi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{2(\pi/3)0{,}15\cdot 0{,}1}{0{,}15+0{,}1}} \approx 0{,}354\ c^{-1}.$$

Угловая скорость на первом этапе:

$$\omega_I = \omega_{0(I)} + \varepsilon_I t_I = 0 + \varepsilon_1 t_I = \varepsilon_1 t_I.$$

В конце первого этапа $\omega_I=\omega_1$, $t_I=t_1$следовательно, $\omega_1=\varepsilon_1 t_1$, откуда

$$t_1 = \omega_1 / \varepsilon_1 = 0{,}354 / 0{,}15 = 2{,}36 \text{ с}.$$

Угловая скорость на втором этапе ($0 \le t_{II} \le t_2 = t - t_1$)

$$\omega_{II} = \omega_{0(II)} + \varepsilon_{II} t_{II} = \omega_1 - \varepsilon_2 t_{II}.$$

В конце второго этапа $\omega_{II}=0$, $t_{II}=t_2$, следовательно,

$$0 = \omega_1 - \varepsilon_2 t_2,$$

откуда $t_2 = \omega_1 / \varepsilon_2 = 0{,}354 / 0{,}1 = 3{,}54$ с.

Ускорение aцентра тяжести ковша экскаватора определяем по формуле. Максимального значения оно достигает при $\omega=\omega_{max}=\omega_1$ и $\varepsilon=\varepsilon_{max}=\varepsilon_1$, т.е. в конце первого этапа:

$$a = a_{max} = R\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 10{,}5\sqrt{0{,}15^2 + 0{,}354^4} \approx 2{,}05 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2\varphi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \approx 0{,}354 \text{ с}^{-1}$;

$t_1 = 2{,}36$ с; $t_2 = 3{,}54$ с; $a \approx 2{,}05$ м/с^2.

Практическая работа №8
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Скорость v_Bточки В плоской фигуры, полученной при сечении движущегося тела плоскостью, параллельной направляющей плоскости, равна геометрической сумме скорости v_Aполюса А фигуры и скорости vданной точки В при вращательном движении фигуры вокруг оси, проходящей через полюс А и перпендикулярной плоскости фигуры:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA};\ \ \vec{v}_{BA} \perp AB;\ \ v_{BA} = \omega l_{AB},$$

где ω - угловая скорость фигуры, не зависящая от выбора полюса. Полюсом фигуры может служить любая ее точка.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (теорема о проекциях скоростей).

Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоской фигуры -такая ее точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Скорости всех остальных точек плоской фигуры могут быть определены как скорости точек при вращательном движении фигуры вокруг МЦС:

$$v_A = \omega l_{AP};\ \vec{v}_A \perp AP,$$

где точка Р-МЦС.

Ускорение $a_в$точки В плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения a_Aполюса А и ускорения a_{BA}данной точки В привращательномдвижениифигурывокруг оси, проходящей через полюс А и перпендикулярной плоскости фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA};$$

$$a^n_{BA} = \omega^2 l_{AB},\ \ \vec{a}^{\,n}_{BA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA};\ \ a^{\tau}_{BA} = \varepsilon l_{AB},\ \ \vec{a}^{\,\tau}_{BA} \perp AB,$$

где ε - угловое ускорение фигуры, $\varepsilon = d\omega/dt = \dot{\omega}$.

8.1. Механизм подачи бурового станка (рис. 8.1, а) приводится в движение с помощью цепи 1, огибающей звездочки 2, 2' и 3; последняя жестко связана с колесом 4, катящимся по рейке 5. Известны скорость цепи и, радиус R звездочки 3 и радиус rколеса 4. Определить скорость ν бурового инструмента и угловую скорость ω_3 звездочки 3.

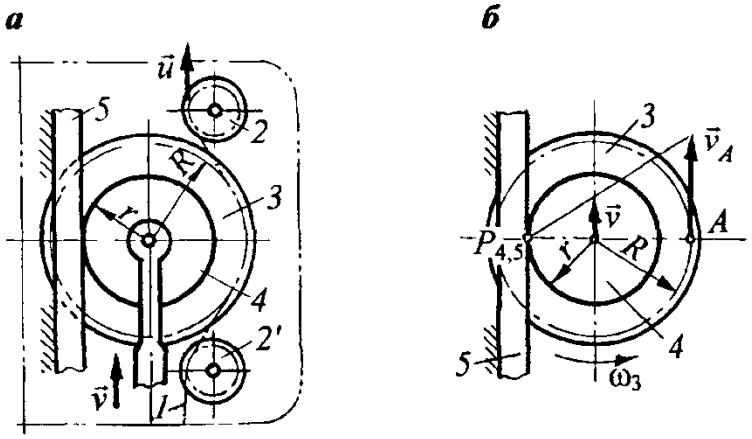


Рис. 8.1

Решение. Известно, что угловая скорость ведомой звездочки цепной передачи - величина переменная даже при постоянной скорости цепи. Однако соблюдение определенных рекомендаций при выборе конструктивных параметров передачи (числа зубьев звездочки, шага цепи и др.) позволяет снизить периодическое изменение угловой скорости до 1-2 % [3]. В данном случае, когда скорость цепи весьма мала, колебаниями угловой скорости звездочки 3 и колеса 4, а следовательно, и колебаниями скорости v перемещения бурового инструмента безусловно можно пренебречь и считать, что скорость v_AточкиА звездочки (рис. 8.1, б) равна скорости и цепи.

Полюс $P_{4,5}$ зацепления колеса 4 с неподвижной рейкой 5 является мгновенным центром скоростей (МЦС) звена 3-4 и поэтому угловая скорость звездочки

$$\omega_3 = v_A / l_{P_{4,5}A} = u/(R+r),$$

а скорость центра колеса, т.е. скорость перемещения бурового инструмента:

$$v = r\,\omega_3 = r\,u\,/(R+r).$$

Ответ: $v = r\,u\,/(R+r)$; $\omega_3 = u/(R+r)$.

8.2. Определить скорость v подъема бурового инструмента 1 и угловую скорость ω блока 2 (рис. 8.2, а), если скорость каната 3 равна и, а радиус блока *r*.

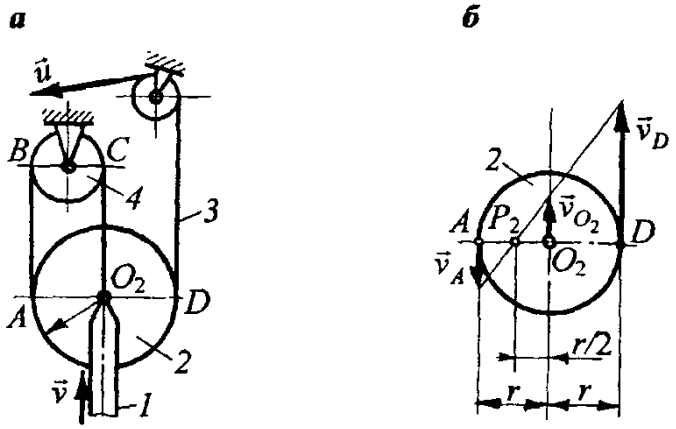


Рис. 8.2

Решение. Канат, принимаемый за нерастяжимую нить, огибает блок 4, вращающийся вокруг неподвижной оси, следовательно, все точки каната на участке O_2Cимеют в данный момент скорость v, направленную вертикально вверх, а на участке BA -такую же по величине скорость v, но направленную вертикально вниз, т.е.v_A=-v_{O2}и v_A=v_{O2}=v. МЦС блока 2 расположен вточке пересечения прямой AD и линии, проведенной через концы векторов v_Aи v_{O2}(рис. 8.2, б). Поскольку скорости точек A и O_2одинаковы, то и отрезки AP_2и P_2O_2равны между собой, т.е.

$$AP_2 = P_2O_2 = r/2.$$

Скорость v_Dканата в точке D равна и, поэтому угловая скорость блока

$$\omega = u/DP_2 = u/(r + r/2) = 2\,u/(3r).$$

Скорость центра O_2 блока 2, т.е. скорость подъема бурового инструмента:

$$v = \omega \cdot P_2O_2 = \frac{2u}{3r}\,\frac{r}{2} = \frac{u}{3}.$$

Ответ: $v = u/3$; $\omega = 2\,u/(3r)$.

8.3. Механизм подачи шпинделя 1 бурового станка приводится в движение от гидроцилиндра 2 через систему блоков 3, ..., 6(рис. 8.3, а). Скорость штока гидроцилиндра равна и, радиусы блоков одинаковы. Определить скорость шпинделя и отношение угловых скоростей блоков.

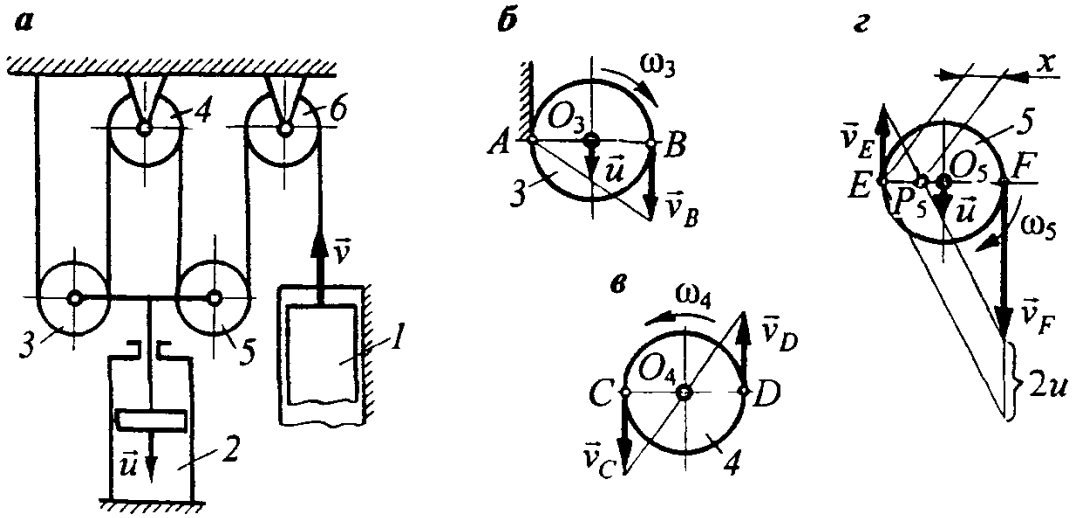


Рис. 8.3

Решение. Канат считаем гибкой нерастяжимой нитью. Крайняя левая ветвь каната неподвижна, скорости всех ее точек в данный момент равны нулю, следовательно, точка А - МЦС блока 3 (рис. 8.3, б). Скорость центра этого блока равна скорости штока гидроцилиндра, тогда

$$\omega_3 = v_{O_3}/r = u/r; \quad v_B = \omega_3 \cdot 2r = 2u.$$

Скорость v_Cточки С каната (рис. 8.3, в) по величине и направлению равна скорости точки В. Центр блока 4 неподвижен, поэтому

$$\vec{v}_D = -\vec{v}_C; \; v_D = v_C = v_B = 2u; \; \omega_4 = v_C/r = 2u/r.$$

Скорость v_Eточки Еканата по величине и направлению равна скорости точки D. Центр блока 5 движется со скоростью штока гидроцилиндра, поэтому картина скоростей точек этого блока, расположенных на горизонтальном диаметре, имеет вид, показанный на рис. 8.3, г, где точка P_5- МЦС блока 5. Угловая скорость блока 5

$$\omega_5 = v_{O_5}/(r-x) = v_E/x, \quad \text{или} \quad u/(r-x) = 2u/x,$$

откуда$x=2r/3$, следовательно,

$$\omega_5 = 2u/(2r/3) = 3u/r; \; v_F = \omega_5 \cdot FP_5 = (3u/r)(2r-x) = 4u.$$

От точки F до места крепления со шпинделем все точки центральной оси каната имеют одинаковую по модулю скорость, вследствие этого скорость шпинделя $v=v_F=4u$, а угловая скорость блока 6:

$$\omega_6 = v/r = 4u/r.$$

Отношение угловых скоростей:

$$\omega_3 : \omega_4 : \omega_5 : \omega_6 = (u/r) : (2u/r) : (3u/r) : (4u/r) = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Ответ: $v = 4u$; $\omega_3 : \omega_4 : \omega_5 : \omega_6 = 1 : 2 : 3 : 4$.

8.4. Поворотная платформа экскаватора опирается на гусеницы в трех точках, являющихся вершинами равнобедренного треугольника АВС, в котором АС=ВС (рис. 8.4, а). Скорость точки А перпендикулярна АВ, скорость точки С направлена вдоль АС. Определить угловую скорость платформы и скорость точки В, если

известны скорость v_Aточки А, длина стороны АВ треугольника ($AB=l$)и угол α.

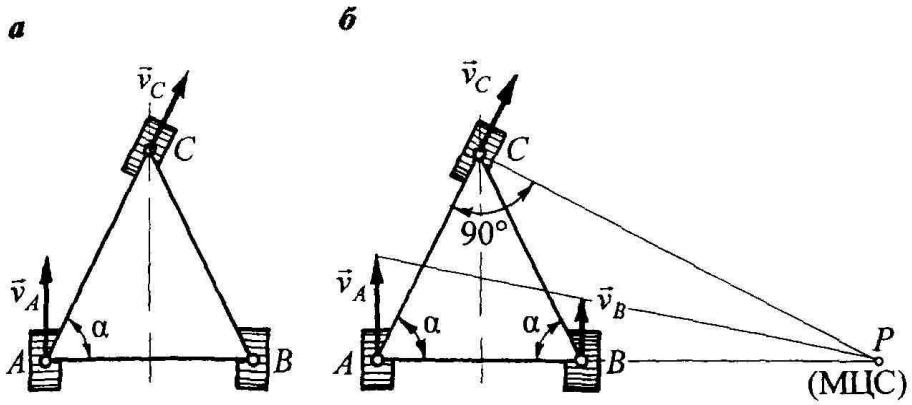


Рис. 8.4

Решение. Мгновенный центр скоростей платформы находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек А и В к векторам скоростей этих точек (рис. 8.4, б).

Угловая скорость платформы

$$\omega = v_A / AP.$$

Вычисляем длину отрезка АР (см. рис. 8.4, б):

$$AP = AC / \cos\alpha = \frac{AB/2}{\cos\alpha} \Big/ \cos\alpha = \frac{l}{2\cos^2\alpha}.$$

Тогда

$$\omega = v_A(2\cos^2\alpha)/l;$$

$$v_B = \omega \cdot PB = \omega\,(AP - AB) =$$

$$= \frac{2v_A\cos^2\alpha}{l}\left(\frac{l}{2\cos^2\alpha} - l\right) = v_A(1 - 2\cos^2\alpha) = -v_A\cos 2\alpha.$$

Если $\alpha>\pi/4$, то $v_B>0$ и $v_B//v_A$; если $\alpha<\pi/4$, то$v_B<0$ и $v_B//v_A$; если $\alpha=\pi/4$, то $v_B=0$, т.е. вращение происходит вокруг вертикальной оси, перпендикулярной платформе и проходящей через точку В (МЦС - в точке В).

Ответ: $\omega = (2v_A\cos^2\alpha)/l$; $v_B = v_A|\cos 2\alpha|$, **причем** $\vec{v}_B \uparrow\uparrow \vec{v}_A$, если $\alpha > \pi/4$; $\vec{v}_B \uparrow\downarrow \vec{v}_A$, если $\alpha < \pi/4$.

8.5. Внутри ходового колеса 1 (рис. 8.5, а) погрузочной машины помещен планетарный механизм, зубчатое колесо 2 которого жестко связано с корпусом машины, движущейся поступательно. Колесо 3 вращается с известной угловой скоростью ω; оси колес 4 жестко связаны с ходовым колесом. Известно отношение чисел зубьев $z3/z4=i$и радиус R. Определить скорость корпуса машины, если проскальзывание ходовых колес по почве отсутствует.

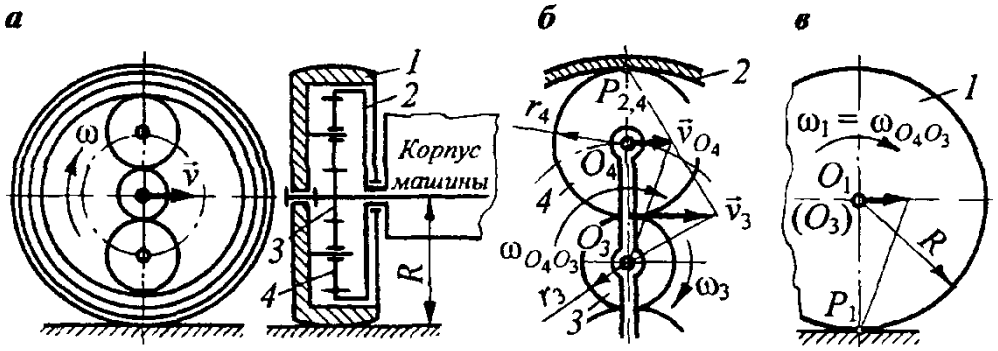


Рис. 8.5

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение, которое можно представить состоящим из поступательного движения со скоростью центра солнечного колеса 3, т.е. со скоростью v корпуса машины, и вращательного движения вокруг этого центра с угловой скоростью ω_1.

Поскольку кинематические характеристики вращательной части движения не зависят от выбора полюса, такая разбивка движения на его составные части позволяет найти абсолютную угловую скорость колеса 1, рассматривая только его вращение вокруг неподвижной центральной оси.

Окружная скорость солнечного колеса 3

$$v_3 = \omega_3 r_3 = \omega r_3.$$

Сателлит 4 перекатывается по неподвижному коронному колесу 2, следовательно, МЦС сателлита совпадает с полюсом $P_{2,4}$ зацепления зубчатых колес 2 и 4 (рис. 8.5, б), при этом скорость v_{O4}центраO_4сателлита 4 равна половине окружнойскорости солнечного колеса

$$(v_{O_4} = v_3 / 2).$$

Окружная скорость водила O_4O_3равна скорости центра сателлита 4, а отношение чисел зубьев колес равно отношению их радиусов, поэтому угловая скорость водила

$$\omega_{O_4O_3} = \frac{v_{O_4}}{O_4O_3} = \frac{v_3/2}{r_3 + r_4} = \frac{\omega r_3/2}{r_3 + r_4} = \frac{\omega r_3 / r_4}{2(r_3/r_4 + 1)} = \frac{\omega i}{2(i+1)}.$$

Роль водила в заданном механизме выполняет ходовое колесо 1,следовательно, $\omega_1 = \omega_{O4O3}$. Мгновенным центром колеса 1является точка P_1(рис. 8.5, в) его контакта с почвой, поэтому скорость центра O_1колеса 1, равная скорости корпуса машины, определяется как скорость точки тела при его вращении вокруг МЦС:

$$v = \omega_1 \cdot O_1P_1 = \omega_1 R = \omega iR / [2(1 + i)].$$

Ответ: $v = \omega iR / [2(1 + i)]$.

Практическая работа №9
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Если некоторая точка Мдвижется относительно системы отсчета *Oxyz*, перемещающейся в свою очередь относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которая считается неподвижной, то движение точки по отношению к подвижным осям называется относительным. Движение подвижной системы отсчета *Oxyz*относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$называется переносным. Подчеркнем то обстоятельство, что в такой формулировке термин "переносное движение" нельзя относить к точке, он относится к системе отсчета, т.е. к некоторому подвижному телу, по которому перемещается точка М. Можно, однако, это понятие ввести несколько иначе, связав его непосредственно с рассматриваемой точкой. В этом случае переносным движением точки называют то мгновенное движение, которым обладала бы точка М по отношению к неподвижной системе, если бы в данный момент была жестко связана с подвижной системой отсчета. Наконец, движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$(точнее, по отношению к системе, которая в условиях данной задачи может считаться неподвижной) называется абсолютным.

В связи с этим различают абсолютную (v_a), переносную (v_e) и относительную (v_r) скорости, а также абсолютное (a_a), переносное (a_e) и относительное (a_r) ускорения точки М. При этом под переносной скоростью и переносным ускорением понимают соответственно скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает точка М.

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей (теорема сложения скоростей):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Если угол между векторами v_eи v_rобозначить α, то модуль вектора v_aабсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\alpha}.$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова (поворотного) ускорений (теорема Кориолиса):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к.$$

Если точки подвижной системы отсчета движутся относительно неподвижной системы по криволинейным траекториям, то переносное ускорение a_eцелесообразно представить как геометрическую сумму его нормальной a_e^nитангенциальной a_e^τсоставляющих. Аналогичную операцию следует проделать с ускорением a_r, если

относительное движение точки не является прямолинейным. После этих изменений уравнение в общем случае принимает вид

$$\vec{a}_{\text{а}} = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Отметим, что при вычислении переносной скорости и переносного ускорения не требуется учитывать относительное движение точки, поэтому v_eи a_eопределяют, пользуясь методами кинематики твердого тела, как скорость и ускорение точки некоторого тела, неизменно связанного с подвижной системой отсчета и движущегося вместе с ней.

При вычислении относительной скорости и относительного ускорения не требуется учитывать переносное движение точки, поэтому v_r и a_rопределяют, пользуясь методами кинематики точки.

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_{\text{к}} = 2\,(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r),$$

где ω_e - вектор переносной угловой скорости, направленный вдоль оси переносного вращения в ту сторону, откуда вращение подвижной системы видно происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль кориолисова ускорения

$$a_{\text{к}} = 2\,\omega_e v_r \sin\beta,$$

где β - угол между векторами ω_e и v_r.

Направление вектора a_k можно определить, если использовать:

1) правило векторного произведения, поскольку вектор a_k направлен так же, как и вектор $(\omega_e \times v_r)$, т.е. перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы ω_e и v_r, в ту сторону, откуда поворот вектора ω_eк вектору v_rчерез минимальный угол β виден происходящим против хода часовой стрелки;

2) правило Жуковского. В этом случае вектор v_rпроецируют на плоскость Q, перпендикулярную к ω_e, и полученную проекцию v_{rQ}поворачивают в этой плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения; повернутый вектор и будет указывать направление a_k.

Из последней формулы следует, что кориолисово ускорение равно нулю, если $\omega_e \| v_r$(тогда $\sin\beta = \sin 0° = \sin 180° = 0$)или если переносное движение - поступательное (тогда $\omega_e = 0$).

9.1.Скорость цепи многочерпакового экскаватора(рис. 9.1, а) $v_ц$=16 м/мин.С какой скоростью $v_э$ должен перемещаться экскаторвдоль откоса, чтобы черпакине оставляли гребней и пропусков? Расстояние междучерпаками l=0,8 м, шириначерпака в направлении, перпендикулярном к плоскостичертежа, b=0,4 м.

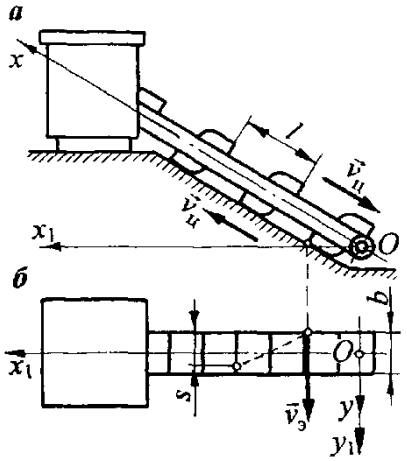


Рис. 9.1

Решение. При работе экскаватора черпаки совершают-сложное движение, состоящее из переносного движения экскаватора вдоль откоса со скоростью $v_э$ и относительного движения черпаков вдоль стрелы вместе с цепью со скоростью $v_ц$. Черпаки не оставляют гребней и пропусков на разрабатываемой поверхности откоса, если за время *t*относительного перемещения рабочего черпака вдоль стрелы со скоростью $v_r=v_ц$на расстояние, равное шагу l размещения черпаков на цепи, перемещение *s*экскаватора вдоль откоса со скоростью $v_e=v_э$за то же время t не превышает ширины черпака b(рис. 9.1, б). Считаем движение экскаватора вдоль откоса и движение цепи вдоль стрелы равномерными, тогда$s=v_э t \le b$, а$t=l/v_ц$, т.е.$v_э l/v_ц \le b$, или

$$v_э \le v_ц\, b / l = 16 \cdot 0{,}4 / 0{,}8 = 8 \text{ м/мин} = 0{,}48 \text{ км/ч} \approx 0{,}133 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_э \le 0{,}133$ м/с.

9.2.Шнек угольного комбайна (рис. 9.2, а) вращается счастотой n=44 мин$^{-1}$, диаметр шнека D=1м. Скорость движения комбайна вдоль забоя (скорость подачи) u=2,9 м/мин. Определить абсолютные скорости точек M_1, M_2и M_3на окружности шнека (скорости резания). Какой угол α с направлением подачи составляет скорость точки M_2?

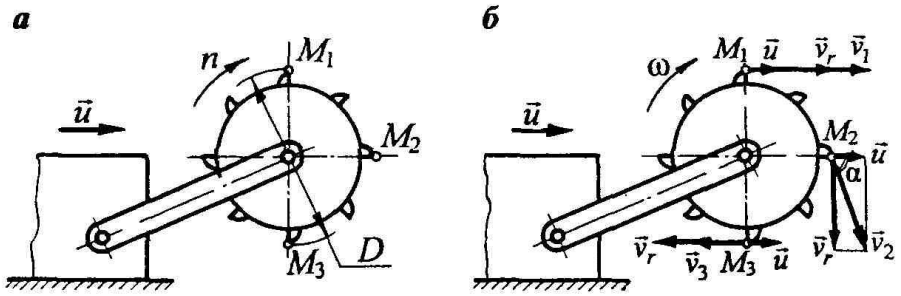


Рис. 9.2

Решение. Точки M_1, M_2и M_3совершают сложное движение, которое складывается из переносного поступательного движения вместе с комбайном вдоль забоя и криволинейного относительного движения по периферии (окружности) шнека при равномерном вращении последнего.

Переносная скорость для всех рассматриваемых точек одинакова и равна скорости подачи:

$$v_e = u = 2{,}9 \text{ м/мин} \approx 0{,}048 \text{ м/с}.$$

Вектор относительной скорости каждой из рассматриваемых точек M_jнаправлен по касательной к относительной траектории (окружности диаметром D), т.е. перпендикулярно к радиусу OM_jв сторону относительного движения (рис. 9.2, б). Модуль относительной скорости для всех этих точек одинаков и равен

$$v_r = \omega \frac{D}{2} = \frac{\pi n}{30} \frac{D}{2} = \frac{\pi \cdot 44}{30} \frac{1}{2} \approx 2{,}304 \text{ м/с}.$$

Абсолютные скорости определяем по уравнению, учитывая, что векторы скоростей$v_e = u$иv_rточки M_1совпадаютпо направлению, точки M_2 - взаимно перпендикулярны, а точки M_3- противоположны по направлению (см. рис. 9.2, б). Тогда модули этих скоростей равны:

$$v_1 = v_r + u = 2{,}304 + 0{,}048 = 2{,}352 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \sqrt{v_r^2 + u^2} = \sqrt{2{,}304^2 + 0{,}048^2} \approx 2{,}304 \text{ м/с};$$

$$v_3 = v_r - u = 2{,}304 - 0{,}048 = 2{,}256 \text{ м/с}.$$

Угол α между направлением вектора абсолютной скорости точки M_2и направлением подачи комбайна

$$\alpha = \arccos(u/v_2) = \arccos(0{,}048/2{,}304) = 88{,}8°.$$

Ответ: *v_1=2,35 м/с; v_2=2,3 м/с; v_3=2,26 м/с; α=88,8°.*

9.3. Шнек (винт) шнекового транспортера вращается с постоянной угловой скоростью ω внутри трубы диаметром D, приэтом транспортируемый материал движетсяпараллельно оси шнека(рис. 9.3,а). Определить скорость uэтогодвижения, а также скорость $v_{ск}$скольжениячастицы Мматериала,находящейся на внутренней поверхноститрубы, по винтовой поверхности шнека.
Шагшнека равен h.

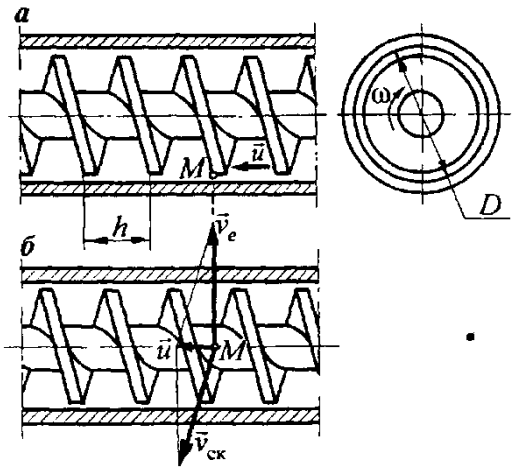


Рис. 9.3

Решение. Поступательное движение транспортируемого материала со скоростью uотносительно неподвижной трубы является его абсолютным движением, для исследования которого достаточно рассмотреть движение какой-либо одной частицы, например материальной точки М, находящейся на внутренней поверхности трубы. Переносным движением считаем вращение шнека вокруг своей оси, а относительным - скольжение частицы по винтовой поверхности шнека с некоторой скоростью $v_r = v_{ск}$.

Абсолютную скорость uопределяем из условия, что за один оборот шнека

точка Мполучает перемещение вдоль оси трубы, равное шагу шнека. Если время одного оборота равно Т, то

$$u = h / T. \qquad (1)$$

Время *T*находим из уравнения $\varphi=\omega t$ равномерного вращательного движения шнека, принимая $\varphi=2\pi$ и $t=T$:

$$T = 2\pi / \omega. \qquad (2)$$

С учетом соотношения (2) равенство (1) принимает вид

$$u = \omega h / (2\pi). \qquad (3)$$

Переносная скорость равна окружной скорости точки, находящейся на поверхности шнека, т.е.$v_e=\omega d/2$, и направлена перпендикулярно к плоскости, содержащей ось шнека и точку М.

Построив параллелограмм скоростей в соответствии с равенством $u=v_e+v_{ск}$(рис. 9.3, б) и учитывая, что v_eперпендикулярен *u*, находим величину скорости скольжения $v_{ск}$ частицы материала по винтовой поверхности шнека:

$$v_{ск} = \sqrt{u^2 + v_e^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega h}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{\omega D}{2}\right)^2} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{h^2 + \pi^2 D^2}.$$

Ответ: $u = \frac{\omega h}{2\pi}$; $v_{ск} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{h^2 + \pi^2 D^2}$.

9.4. Цилиндрический барабан питателя вращается с постоянной угловой скоростью ω, радиус барабана *R*; абсолютное движение частицы Мматериала, находящейся на внутренней поверхности барабана, - равномерное и прямолинейное со скоростью *u*, параллельной оси барабана (рис. 9.4, а). Определить скорость и ускорение точки М относительно барабана.

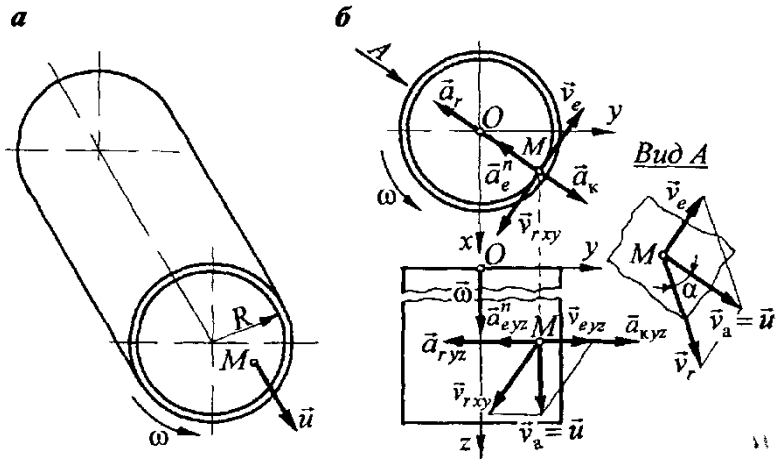


Рис. 9.4

Решение. Движение частицы материала (точки М) рассматриваем как сложное, принимая вращение барабана вокруг оси *z* за переносное движение, а скольжение точки по внутренней поверхности барабана - за относительное движение (рис. 9.4, б).

Переносная скорость $v_e=\omega R$, вектор v_eкасателен к внутренней поверхности барабана и перпендикулярен к плоскости, проходящей через ось барабана и точку М, его направление определяется направлением вращения барабана.

Поскольку абсолютная скорость v_aточки Мизвестна по величине и направлению ($v_a=u$), то на основании векторного равенства с учетом того обстоятельства, что векторы uи v_eлежат в плоскости, касательной к поверхности барабана, приходим к выводу, что вектор относительной скорости также расположен в этой плоскости. Его величину определяем из параллелограмма скоростей (рис. 9.4, б), принимая во внимание, что v_eперпендикуляренu:

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2 R^2}.$$

Направление вектора v_rопределяется углом

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\omega R / u).$$

По условию задачи абсолютное движение точки М- равномерное и прямолинейное, следовательно, ее абсолютное ускорение a_a=0.

Барабан вращается с постоянной угловой скоростью, поэтому касательная составляющая переносного ускорения $a_e^{\tau}=0$, т.е.$a_e=a_e^n$

Направление и величина относительного ускорения a_rпока неизвестны.

При указанных условиях уравнение принимает вид

$$0 = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_к. \quad (1)$$

Переносное ускорение $a_e^n=\omega R$и направлено от точки Мк оси цилиндра по нормали к его поверхности.

Кориолисово ускорение

$$a_к = 2\omega v_r \sin\alpha = 2\omega v_e = 2\omega^2 R.$$

Для определения направления кориолисова ускорения по правилу Жуковского проецируем вектор v_rотносительной скорости на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, т.е. к оси барабана, и поворачиваем полученную проекцию v_{rxy}на угол 90° в направлении вращения барабана. В результате оказывается, что вектор $a_к$направлен вдоль той жепрямой, что и ускорение a_e^n, но в противоположную сторону. Из уравнения (1) при этом следует, что вектор a_rтакже будет направлен вдоль указанной нормали к поверхности барабана.

Проецируя уравнение (1) на эту нормаль и полагая, что вектор a_rнаправлен к оси барабана, получаем

$$0 = a_e^n + a_r - a_к,$$

откуда $a_r = a_к - a_e^n = 2\omega^2 R - \omega^2 R = \omega^2 R.$

Поскольку a_r>0, то это значит, что направление вектора a_rбыло выбрано верно.

Ответ: $v_r = \sqrt{u^2 + \omega^2 R^2}$;

Вектор v_rлежит в плоскости,касательной к цилиндру, под углом $\alpha=arctg(\omega R/u)$к вектору uв сторону, противоположную направлению вращения барабана. Вектор a_rнаправлен к оси цилиндра нормально к его внутренней поверхности; $a_r=\omega^2 R$.

ДИНАМИКА

Практическая работа №10

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Основное уравнение динамики материальной точки

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где m- масса точки; a - ее ускорение; F- равнодействующая приложенных к ней сил.

При решении задач данной главы используются следующие системы дифференциальных уравнений движения материальной точки, полученные из уравнения:

а)в декартовых координатах x, y, z

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z;$$

б)в цилиндрических координатах r, φ, z

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi, \quad m\ddot{z} = F_z;$$

в)в естественной форме, т.е. в проекциях на естественные оси траектории точки - касательную τ, главную нормаль nи бинормаль b

$$m\ddot{s} = m\dot{v} = F_\tau, \quad mv^2/\rho = F_n, \quad 0 = F_b.$$

В левой части каждого из этих уравнений содержится произведение массы точки на известное из кинематики выражение для проекции ускорения точки на соответствующую ось, в правой части - проекция равнодействующей на эту ось.

10.1. Кусок угля поступает со скоростью v на ленту наклонного конвейера, движущуюся со скоростью $u>v$(рис. 10.1, а) Определить время и путь скольжения куска по ленте, если угол наклона конвейера к горизонту равен α, а коэффициент трения угля по ленте $-f$

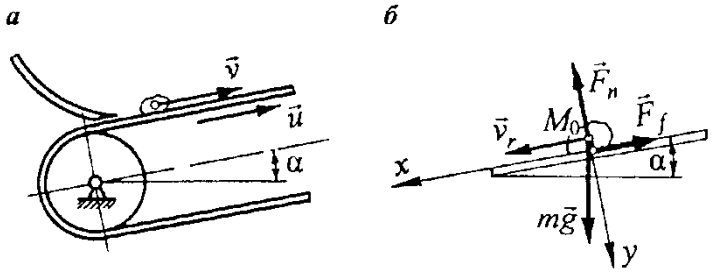


Рис 10.1

Решение. Кусок угля поступает на конвейер со скоростью v, меньшей, чем скорость и ленты, поэтому последняя в течение некоторого времени (времени скольжения $t_{ск}$) обгоняет кусок, причем его скорость v_rотносительно ленты (скорость скольжения) направлена противоположно направлению движения рабочей ветви ленты. Начальное значение $v_{r(0)}$этой скорости численно разно разности u-v.

Поместим начало отсчета (начало координат) в точку M_o падения куска на ленту, ось M_oxнаправим вдоль ленты в сторону относительного движения куска (рис. 10.1, *б*).

На кусок угля, принимаемый за материальную точку M, во время его скольжения по ленте действуют: сила тяжести mg;нормальная к поверхности ленты реакция связи F_n; сила трения F_f, направление которой противоположно направлению скорости скольжения v_r, т.е. совпадает с направлением скорости uУравнение движения куска угля относительно ленты

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_f,$$

где a_r- ускорение этого движения

Проецируем уравнение на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F_f, \\ m\ddot{y} &= mg\cos\alpha - F_n. \end{aligned}\right\}$$

Поскольку кусок угля скользит по ленте, не отрываясь от нее, а сама лента считается идеально ровной, то движения вдоль оси yнет, значит, $y''=0$, поэтому из второго уравнения системыимеем $F_n=mg\cos\alpha$. Сила трения $F_f=fF_n=fmg\cos\alpha$.

Подставляя это выражение в первое уравнение системы и сокращая на m, получаем

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \text{const}.$$

Следовательно, пока $v_r\neq0$, т.е. пока существует скольжение куска угля по ленте конвейера, ускорение этого относительного движения

$$a_r = \ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \text{const}.$$

Отметим, что для нормальной работы конвейера величина силы трения F_fдолжна быть больше, чем величина составляющей силы тяжести $mg\sin\alpha$, иначе уголь будет просто скатываться с ленты. Это значит, что $f\cos\alpha>\sin\alpha$, а $a_r<0$.

Скорость и перемещение куска находим по известным из кинематики формулам для определения параметров равнопеременного движения точки.

Скорость равнозамедленного прямолинейного относительного движения точки M

$$v_r = v_{r(0)} + a_r t = u - v + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t.$$

Время скольжения $t_{ск}$ находим из выражения при $v_r=0$:

$$t_{ск} = (u - v) / [g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)].$$

И наконец, путь скольжения куска, т.е. расстояние s, которое точка Мв равнозамедленном движении пройдет по ленте с момента падения куска угля в точку M_0до того момента, когдаскорости ленты и куска сравняются, а скорость скольжения станет равной нулю:

$$s = v_{r(0)}\,t_{ск} + a_r\,t_{ск}^{\,2}/2 = (u - v)(u - v) / [g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)] +$$
$$+ g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\{(u - v) / [g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)]\}^2 / 2 =$$
$$= (u - v)^2 / [2\,g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)].$$

Ответ: $t_{ск} = (u - v) / [g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)]$;
$s = (u - v)^2 / [2\,g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)]$.

10.2. На начальном этапе торможения ($0<t<t_1$) самосвала массой m=100 т, движущегося по горизонтальной дороге со скоростью v_0=18 км/ч, сила торможения возрастает пропорционально времени по закону $F=F_0t/t_1$где F_0- максимальное значение силы торможения, F_0=400 кН; h- длительность этапа, t_1= 0,3 с. Определить путь s_1, пройденный самосвалом за время h, и скорость v_1в конце пути.

Решение. На самосвал при его торможении действуют вертикальная сила тяжести mg; нормальная к поверхности реакция F_nгоризонтальной дороги и сила торможения F, направленная противоположно скорости. Принимаем начало торможения за начало отсчета времени, начало координат совмещаем с центром масс самосвала, а ось xрасполагаем горизонтально. В этом случае начальные условия процесса торможения имеют вид

$$t_0 = 0,\quad x_0 = 0,\quad v_0 = 18\ \text{км/ч} = 5\ \text{м/с}.$$

Траектория движения центра масс машины совпадает с координатной осью x, поэтому дифференциальное уравнение движения получаем в виде первого уравнения системы:

$$m\ddot{x} = -\frac{F_0}{t_1}t,\quad \text{или}\quad m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{F_0}{t_1}t.$$

Разделяем в последнем уравнении переменные и интегрируем его:

$$m\int_{v_0}^{v_x} dv_x = -\frac{F_0}{t_1}\int_{t_0}^{t} t\,dt,$$

откуда, учитывая, что t_0=0, находим

$$v_x = v_0 - F_0 t^2/(2mt_1).$$

Определяем скорость самосвала в конце этапа торможения (при $t=t_1$=0,3 с):

$$v_1 = v_0 - F_0t_1^{\,2}/(2mt_1) = v_0 - F_0t_1/(2m) = 5 - 400\cdot0{,}3\ /(2\cdot100) = 4{,}4\ \text{м/с}.$$

Уравнение перепишем следующим образом:

$$dx / dt = v_0 - F_0 t^2/(2mt_1).$$

Разделив переменные и интегрируя это уравнение с учетом начальных условий (x_o=0, t_0=0), получаем

$$x = v_0 t - \frac{F_0}{6mt_1}t^3.$$

Путь, пройденный самосвалом за время торможения,

$$s_1 = x_1 = v_0 t_1 - \frac{F_0}{6mt_1} t_1^3 = v_0 t_1 - \frac{F_0 t_1^2}{6m} = 5 \cdot 0{,}3 - \frac{400 \cdot 0{,}3^2}{6 \cdot 100} = 1{,}44 \text{ м}.$$

Ответ: $s_1 = v_0 t_1 - F_0 t_1^2/(6m) = 1{,}44$ м;
$v_1 = v_0 - F_0 t_1/(2m) = 4{,}4$ м/с.

10.3. Решить предыдущую задачу, учитывая силу сопротивления воздуха, модуль которой прямо пропорционален модулю скорости самосвала; коэффициент пропорциональности μ=4 т/с.

Решение. Дифференциальное уравнение движения в этом случае принимает вид

$$m\ddot{x} = -\frac{F_0}{t_1} t - \mu v, \text{ или } \frac{dv}{dt} = -\frac{F_0}{mt_1} t - \frac{\mu}{m} v.$$

Полагая, $F_0/(mt_1) = b$ и $\mu / m = k$, имеем

$$\frac{dv}{dt} + kv = -bt.$$

Общее решение полученного линейного дифференциального уравнения первого порядка с правой частью выражается формулой

$$v = e^{-\int k\,dt} \left\{ \int \left[(-bt)\, e^{\int k\,dt} \right] dt + C \right\},$$

или

$$v = e^{-kt} \left[C - \frac{b}{k^2} \int (kt) e^{kt}\, d(kt) \right].$$

Интеграл типа $\int ue^u du$ - табличный (см., например, [4, с. 850,интеграл № 126]), его решение: $e^u(u-1)$. Следовательно,

$$v = e^{-kt} \left[C - \frac{b}{k^2} e^{kt} (kt - 1) \right] = Ce^{-kt} - \frac{b}{k^2} (kt - 1).$$

Постоянную С находим, учитывая, что при $t=0$, $v=v_0$, поэтому $v_0=C+b/k^2$, откуда $C=v_0-b/k^2$. Тогда

$$v = \left(v_0 - \frac{b}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{b}{k} t + \frac{b}{k^2}.$$

Определяем скорость самосвала в конце начального этапа торможения, когда $t=t_1$=0,3 с, предварительно подсчитав значения bи k;

$$b = F_0/(mt_1) = 400/(100 \cdot 0{,}3) = 40/3 \text{ м/с}^3,$$

$$k = \mu / m = 4/100 = 0{,}04 \text{ с}^{-1},$$

$$v_1 = \left(v_0 - \frac{b}{k^2} \right) e^{-kt_1} - \frac{b}{k} t_1 + \frac{b}{k^2} =$$

$$= \left(5 - \frac{40/3}{0{,}04^2} \right) e^{-0{,}04 \cdot 0{,}3} - \frac{40/3}{0{,}04} 0{,}3 + \frac{40/3}{0{,}04^2} = 4{,}343 \text{ м/с}.$$

Чтобы найти путь, пройденный самосвалом за время $t=t_1$, левую часть уравнения представим в виде ds/dt, затем разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение, учитывая, что s меняется от 0 до s_1,а время t - от 0 до t_1

$$s_1 = \left(v_0 - \frac{b}{k^2}\right)\int_0^{t_1} e^{-kt}dt - \frac{b}{k}\int_0^{t_1} t\,dt + \frac{b}{k^2}\int_0^{t_1} dt =$$

$$= \left(v_0 - \frac{b}{k^2}\right)\frac{\left(1-e^{-kt_1}\right)}{k} - \frac{bt_1^2}{2k} + \frac{bt_1}{k^2} =$$

$$= \left(5 - \frac{40/3}{0{,}04^2}\right)\frac{\left(1-e^{-0{,}04\cdot 0{,}3}\right)}{0{,}04} - \frac{(40/3)0{,}3^2}{2\cdot 0{,}04} + \frac{(40/3)0{,}3}{0{,}04^2} = 1{,}429\text{ м.}$$

$$\textit{Ответ: } s_1 = \left(v_0 - \frac{b}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{e^{kt_1}}\right)\frac{1}{k} - \frac{bt_1^2}{2k} + \frac{bt_1}{k^2} = 1{,}429\text{ м;}$$

$$v_1 = \left(v_0 - \frac{b}{k^2}\right)\frac{1}{e^{kt_1}} - \frac{bt_1}{k} + \frac{b}{k^2} = 4{,}343\text{ м/с;}$$

$$b = F_0/(mt_1);\ \ k = \mu/m.$$

Практическая работа №11
ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Основное уравнение динамики материальной точки

$$m\,\vec{a} = \vec{F},$$

где *m*- масса точки; *a* - ее ускорение; *F*- равнодействующая приложенных к ней сил.

При решении задач данной работы используются следующие системы дифференциальных уравнений движения материальной точки, полученные из уравнения:

а)в декартовых координатах *x, y, z*

$$m\ddot{x} = F_x,\quad m\ddot{y} = F_y,\quad m\ddot{z} = F_z;$$

б)в цилиндрических координатах *r, φ, z*

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r,\quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi,\quad m\ddot{z} = F_z;$$

в)в естественной форме, т.е. в проекциях на естественные оси траектории точки - касательную τ, главную нормаль *n*и бинормаль *b*

$$m\ddot{s} = m\dot{v} = F_\tau,\quad mv^2/\rho = F_n,\quad 0 = F_b.$$

В левой части каждого из этих уравнений содержится произведение массы точки на известное из кинематики выражение для проекции ускорения точки на соответствующую ось, в правой части - проекция равнодействующей на эту ось.

11.1. При аварийном торможении наклонного шахтного проходческого

подъемника (полка) массой *m*срабатывание тормозного устройства происходит в момент времени t_0, когда скорость полка достигнет некоторого критического значения v_0. Полок движется прямолинейно вниз под углом α к горизонту, при этом тормозящая сила возрастает от начального значения F_0прямо пропорционально пройденному полком пути; коэффициент пропорциональности равен *k*. Определить время торможения *T*от момента t_0 до остановки полка и пройденный за это время путь *s*.

Решение. Совмещая начало координат с центром масс полка, направим ось абсцисс вдоль траектории этого центра (рис. 11.1, а). Считаем, что в процессе торможения на полок действуют три силы: сила тяжести *mg*, нормальная реакция F_nопорной поверхности и тормозящая сила *F*, направленная противоположно направлению вектора скорости полка. График изменения силы *F*в процессе торможения полка показан на рис. 11.1, б,причем $F=F_0+kx$, где F_0- начальное значение тормозящей силы; *k* - коэффициент пропорциональности; *x*- путь, пройденный полком с момента начала торможения.

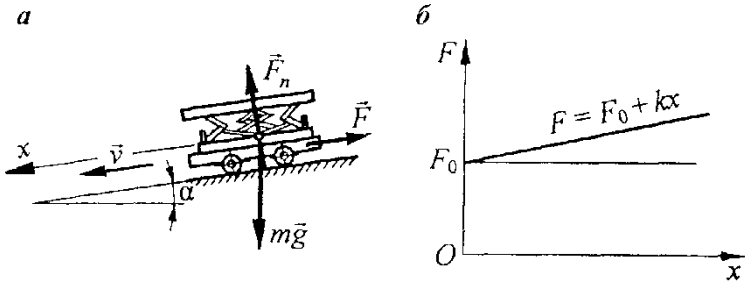


Рис. 11.1

Начальные условия: при $t = 0 \quad v = v_0;\ F = F_0.$

Поскольку центр масс полка движется вдоль координатной оси *x*, то дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F\ ,\ \text{или}\ \ m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_0 - kx\ .$$

Чтобы получить уравнение с разделяющимися переменными, преобразуем левую часть уравнения:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = mv\frac{dv}{dx}.$$

Введем также обозначение постоянной величины в правой части уравнения:

$$R = F_0 - mg\sin\alpha.$$

В результате имеем

$$mv\,dv/dx = -kx - R\,,$$

или (после разделения переменных)

$$m\,v\,dv = -(R + kx)\,dx.$$

Интегрируя уравнение в пределах: $v_0 \ge v \ge 0;\ \ 0 \le x \le s,$

Получаем $-mv_0^2/2 = -Rs - ks^2/2.$

или $ks^2 + 2Rs - mv_0^2 = 0.$

Корни данного уравнения:

$$s = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + kmv_0^2}}{k}.$$

Учитывая, что s>0, окончательно получаем

$$s = \frac{\sqrt{R^2 + kmv_0^2} - R}{k}.$$

Для определения времени торможения *T*от момента t_0до остановки найдем сначала зависимость скорости *v* полка от его координаты *x*, проинтегрировав уравнение при условии, что скорость меняется от v_0 до v, а путь - от 0 до x.

$$m\int_{v_0}^{v} v dv = -\int_0^x (R + kx)dx, \qquad m\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = -\left(Rx + \frac{kx^2}{2}\right)\Big|_0^x,$$

$$\frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\left(Rx + \frac{kx^2}{2}\right),$$

откуда, выбирая только положительное значение корня, находим

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Rx}{m} - \frac{k}{m}x^2}.$$

Представляем скорость как производную перемещения по времени (*v=dx/dt*), разделяем переменные и интегрируем в пределах *0<x<s, 0<t<T*(решение табличного интеграла в левой части уравнения см., например, [4, с. 846]):

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2Rx}{m} - \frac{kx^2}{m}}} = \int_0^T dt, \qquad \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\frac{kx + R}{\sqrt{R^2 + kmv_0^2}}\right)\Big|_0^s = T,$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arcsin\frac{ks + R}{\sqrt{R^2 + kmv_0^2}} - \arcsin\frac{R}{\sqrt{R^2 + kmv_0^2}}\right).$$

Из формулы имеем $ks + R = \sqrt{R^2 + kmv_0^2}$. Тогда, учитывая, что *arcsin1=π/2* и $\pi/2 - \arcsin u = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-u^2}/u\right)$,где

$u = R/\sqrt{R^2 + kmv_0^2}$,

получаем

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{arctg}\frac{v_0\sqrt{mk}}{R}.$$

Ответ: $T = \sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{arctg}\frac{v_0\sqrt{mk}}{R}$; $s = \frac{\sqrt{R^2 + kmv_0^2} - R}{k}$,

где $R = F_0 - mg\sin\alpha$.

11.2. После посадки клети на кулаки канат образует петлю (рис. 11.2, а). Когда из-под клети кулаки убирают, клеть до момента натяжения каната свободно падает с высоты *h*=0,2 м. Определить максимальное удлинение каната, если статическое его удлинение под действием силы тяжести клети $\lambda_{ст}$=0,05 м; массой каната пренебречь.

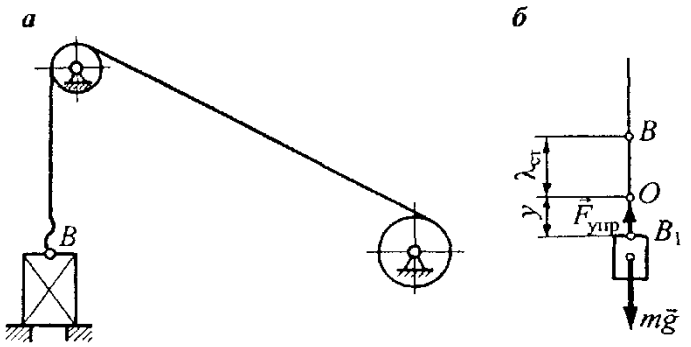


Рис 11.2

Решение. К тому моменту, когда канат выпрямится (начнет растягиваться) при падении клети, точка крепления каната с клетью окажется в положении В (рис. 11.2, б), а сама клеть приобретет скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$.

За начало координат при составлении уравнения движения клети принимаем точку О, соответствующую положению точки крепления каната с клетью в состоянии статического равновесия системы. При этом расстояние ВО равно статическому удлинению $\lambda_{ст}$ под действием силы тяжести клети. Заметим, что

$$\lambda_{ст} = mg / c,$$

где *c*- коэффициент жесткости каната в продольном направлении.

В произвольном положении B_1(см. рис. 11.2, б), когда клеть пройдет некоторое расстояние *y*от положения равновесия, на нее кроме силы тяжести *mg*будет действовать противоположно направленная сила упругости каната $F_{упр}=c\lambda$, где *c* - коэффициент жесткости; λ - деформация (удлинение) каната, $\lambda=\lambda_{ст}+y$.

Дифференциальное уравнение движения в принятой системе отсчета имеет форму второго уравнения системы, т.е.

$$my = mg - F_{упр} = mg - c(\lambda_{ст} + y).$$

Из первого равенства следует, что жесткость каната $c=mg/\lambda_{cm}$.Подставляя значение с во второе уравнение, приводя подобные, сокращая на *m*и обозначая $g/\lambda_{ст}$ через k^2, приводим это уравнение к виду

$$\ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Уравнение представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний точки при отсутствии сопротивления [2, § 94]. Как известно из теории дифференциальных уравнений (см., например, [4, § 498, с.738]), общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка без правой части имеет вид

$$y = A \sin(kt + \alpha),$$

где *A*и α - постоянные интегрирования. В данном случае А -амплитуда; α - начальная фаза колебаний. Максимальное удлинение каната

$$\lambda_{max} = \lambda_{ст} + A.$$

Для определения амплитуды предварительно продифференцируем уравнение:

$$y = Ak \cos(kt + \alpha).$$

Полагаем, что при $t=0$ клеть занимает положение *B*, тогда $y_0=-\lambda_{cm}$, $y'=v_0$.Из уравнений следует, что $-\lambda_{cm}=A\sin\alpha$ *и* $v_0/k=A\cos\alpha$. Складывая почленно квадраты этих равенств, находим

$$A=\sqrt{y_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}=\sqrt{(-\lambda_{ст})^2+\frac{2gh}{g/\lambda_{ст}}}=\sqrt{\lambda_{ст}(\lambda_{ст}+2h)}.$$

Подставляем найденное значение А в формулу:

$$\lambda_{max}=\lambda_{ст}+\sqrt{\lambda_{ст}(\lambda_{ст}+2h)}=0{,}05+\sqrt{0{,}05(0{,}05+2\cdot 0{,}2)}=0{,}2\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda_{max}=\lambda_{ст}+\sqrt{\lambda_{ст}(\lambda_{ст}+2h)}=0{,}2$ м.

11.3. Боек перфоратора движется в прямолинейном каналепод действием силы, обусловленной разностью давления воздуха$\Delta p=p_1-p_2$в задней и передней полостях канала. Упрощеннаязависимость разности Δpотперемещения бойка sпоказана на рис. 11.3: $0<s<l$, l- длина пути бойка, l=115 мм. Определить время tдвижения бойка и его конечную скоростьv, если масса бойка m=0,75 кг, его диаметр d=35 мм, начальная скорость бойка v_0=0 (при s=0); максимальная разность давлений $\Delta p_{max}=4\cdot 10^5$ Н/мм ; при $\Delta p=\Delta p_{max}$боек перемещается на расстояние $s=s_1$=60 мм.

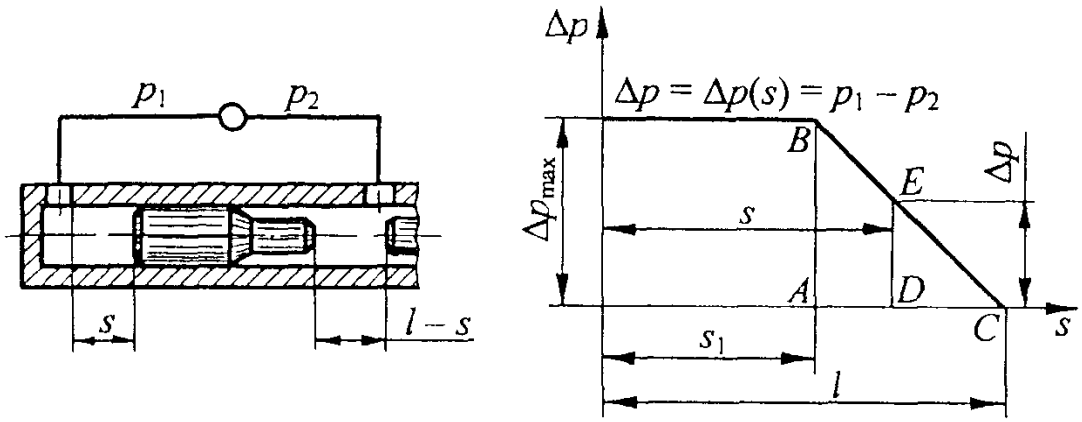


Рис. 11.3

Решение. Рассмотрим движение бойка на первом участке пути ($0<s>s_1$=60 мм= =0,06 м), когда разность давлений воздуха в задней и передней полостях остается постоянной и поэтому действующая на боек сила Fтакже постоянна, т.е.

$$F=F_{max}=\Delta p_{max}(\pi d^2/4)=\text{const}.$$

Дифференциальное уравнение движения бойка в этом случае имеет вид

$$m\ddot{s}=F_{max}=\text{const},$$

откуда

$$\ddot{s}=\frac{F_{max}}{m}=\frac{\pi d^2\Delta p_{max}}{4m}=\text{const}.$$

Поскольку ускорение бойка постоянно, то его движение является равнопеременным и подчиняется известному из кинематики закону

$$s=s_0+v_0t+at^2/2.$$

В данном случае

$$s_0=0;\ v_0=0;\ a=\ddot{s}=\left(\pi d^2\Delta p_{max}\right)/(4m),$$

поэтому

$$s=\left(\pi d^2\Delta p_{max}t^2\right)/(8m),$$

откуда, полагая $s=s_1$, находим время движения бойка по первому участку пути:

$$t_1 = \sqrt{\frac{8 s_1 m}{\pi d^2 \Delta p_{max}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}75}{\pi \cdot 0{,}035^2 \cdot 4 \cdot 10^5}} = 1{,}53 \cdot 10^{-2}\ \text{с}.$$

Скорость равноускоренно движущегося бойка в конце первого участка пути

$$v_1 = v_0 + a t_1 = 0 + \ddot{s} t_1 = \left(\pi d^2 \Delta p_{\max} t_1\right) / (4m) =$$

$$= (\pi \cdot 0{,}035^2\ 4\ 10^5\ 1{,}53\ 10^{-2}) / (4\ 0{,}75) = 7{,}85\ \text{м/с}.$$

На втором участке пути ($s_1 < s < l$) разность Δpдавлений воздуха в задней и передней полостях переменна (см. график на рис. 11.3), следовательно, переменна и величина силы F, действующей на боек.

Выразим величину Δpчерез Δp_{max}, используя подобие треугольников ABC и DEC на графике $\Delta p = \Delta p(s)$:

$$\Delta p = \Delta p_{\max} \frac{l - s}{l - s_1},$$

где s- перемещение бойка. Тогда

$$F = F_{\max} \frac{l - s}{l - s_1}.$$

Дифференциальное уравнение движения бойка по второму участку пути

$$m\ddot{s} = F, \quad \text{или} \quad m \frac{dv}{dt} = F_{\max} \frac{l - s}{l - s_1}.$$

Чтобы свести последнее уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, преобразуем его левую часть:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = mv \frac{dv}{ds}.$$

Тогда

$$mv \frac{dv}{ds} = F_{\max} \frac{l - s}{l - s_1}, \quad \text{или} \quad v\,dv = \frac{F_{\max}}{m(l - s_1)} (l - s)\,ds.$$

Отсюда, интегрируя полученное уравнение в соответствующих пределах, имеем

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{F}{m(l - s_1)} \left(ls - ls_1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s_1^2}{2} \right).$$

Из этого равенства находим скорость бойка на втором участке как функцию перемещения s:

$$v = \sqrt{v_1^2 + \frac{F_{\max}(s - s_1)}{m(l - s_1)} (2l - s - s_1)}.$$

Конечная скорость бойка (при $s = l$)

$$v = \sqrt{v_1^2 + \frac{F_{\max}(l - s_1)}{m(l - s_1)} (2l - l - s_1)} =$$

$$= \sqrt{v_1^2 + \frac{F_{\max}(l - s_1)}{m}} = \sqrt{v_1^2 + \frac{\Delta p_{\max} \pi d^2 (l - s_1)}{4m}} =$$

$$= \sqrt{7{,}85^2 + \frac{4 \cdot 10^5 \pi \cdot 0{,}035^2 (0{,}115 - 0{,}06)}{4 \cdot 0{,}75}} = 9{,}48\ \text{м/с}.$$

Для определения времениt_2перемещения бойка по второму участку

дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_{max}\frac{l-s}{l-s_1}.$$

Введя обозначение $B^2=F_{max}/[m(l-s_1)]$, получаем

$$\ddot{s} + B^2 s = B^2 l.$$

Подсчитаем величину B, которая нам понадобится в дальнейшем:

$$B = \sqrt{\frac{F_{max}}{m(l-s_1)}} = \sqrt{\frac{\pi d^2 \Delta p_{max}}{4m(l-s_1)}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 0{,}035^2 \cdot 4 \cdot 10^5}{4 \cdot 0{,}75(0{,}115-0{,}06)}} = 96{,}59\ \text{с}^{-1}.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью представляет собой сумму какого-либо частного решения данного уравнения с общим решением соответствующего уравнения без правой части. Следовательно, решение уравнения имеет вид

$$s = l + C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt,$$

$$\dot{s} = -C_1 B \sin Bt + C_2 B \cos Bt.$$

Постоянные интегрирования находим, учитывая начальные условия: при $t=0, s=s_1, s'=v_1$, поэтому $C_1=s_1-l$, $C_2=v_1/B$.

При $t = t_2$ $s = l$, тогда

$$l = l + (s_1 - l)\cos Bt_2 + (v_1/B)\sin Bt_2,$$

откуда

$$Bt_2 = \text{arctg}\frac{(l-s_1)B}{v_1} = \text{arctg}\frac{(0{,}115-0{,}06)\,96{,}59}{7{,}85} = 0{,}595.$$

Время движения бойка по второму участку

$$t_2 = (Bt_2) / B = 0{,}595 / 96{,}59 = 0{,}62\ 10^{-2}\ \text{с}.$$

Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = (1{,}53 + 0{,}62)\,10^{-2} = 2{,}15 \cdot 10^{-2}\ \text{с}.$$

Ответ: $t = 2{,}15\ 10^{-2}$ с; $v = 9{,}48$ м/с.

Практическая работа №12
КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Количеством движения материальной точки называют векторную величину mv, равную произведению массы точки на вектор ее скорости.

Количеством движения системы называют геометрическую сумму количеств движения ее точек:

$$\vec{Q} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j$$

где m_j- масса j-й точки; v_j- ее скорость; n- число точекв системе; $j=1,...,n$- номер точки.

Количество движения системы определяют также и по формуле

$$Q=mv_C,$$

где $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$ - масса системы; v_C- скорость ее центрамасс.

12.1. На заключительной стадии движения погрузочной машины (рис. 12.1) ее колеса пробуксовывают по рельсам, а ковш внедряется в породу, испытывая при

этом силу сопротивления $R=fmg+ks$, где f - коэффициент трения колес по рельсам (все колеса - ведущие); m - масса машины; g- ускорение силытяжести; k- коэффициент пропорциональности; s- перемещение машины, отсчитываемое от того ее положения, в котором началась пробуксовка колес. Найти время t_1 и перемещение sот начала пробуксовки до остановки машины, если начальная ее скорость равна v_0.

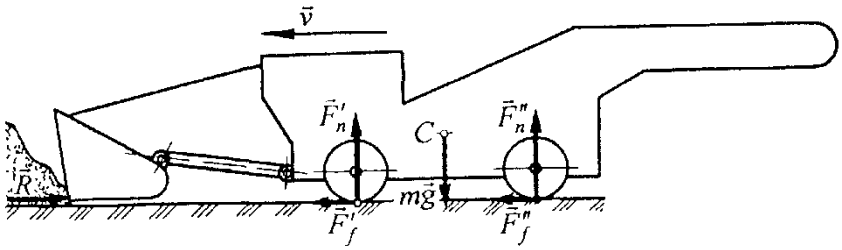


Рис. 12.1

Решение. Внешние силы, действующие на погрузочную машину в процессе внедрения ковша в породу: сила тяжести mg, приложенная в центре масс C; испытываемая ковшом силасопротивления R; нормальные реакции опоры F_n'и F_n'', а также силы трения F_f'и F_f'', действующие соответственно на переднюю и заднюю колесные пары. Изменением положения центра масс системы относительно корпуса машины при заполнении ковша грунтом пренебрегаем и считаем, что центр масс перемещается горизонтально вместе с корпусом.

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс системы.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на координатные оси:

$$mx''=-R+F_f'+F_f'',\ my''=mg-F_n'-F_n''.$$

Поскольку перемещение центра масс по вертикали отсутствует, то $y''=0$, следовательно, $F_n'+F_n''=mg$. Кроме того, позакону Кулона $F_f'=fF_n'$ *и* $F_f''=fF_n''$, т.е. $F_f'+F_f''=f(F_n'+F_n'')=fmg$.

Так как начало координат совпадает с расположением центра масс системы в начальный момент заключительной стадии движения машины, то x=s и первое уравнение движения принимает вид

$$ms''=-mgf-ks+fmg,\ или s''+(k/m)s=0$$

Характеристическое уравнение $u^2+к/m=0$ имеет мнимые корни $u=\pm i\sqrt{k/m}$, поэтому общее решение уравнения:

$$s=C_1\cos\left(t\sqrt{k/m}\right)+C_2\sin\left(t\sqrt{k/m}\right),$$

откуда

$$\dot{s}=-C_1\sqrt{k/m}\sin\left(t\sqrt{k/m}\right)+C_2\sqrt{k/m}\cos\left(t\sqrt{k/m}\right).$$

При$t=t_0=0$ имеем$s_0=0$, $s_0'=v_0$. Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем

$$0=C_1,\quad v_0=C_2\sqrt{k/m},\ \text{т. е.}\ C_2=v_0\sqrt{m/k}.$$

Тогда

$$s=v_0\sqrt{m/k}\sin\left(t\sqrt{k/m}\right),$$

$$v=\dot{s}=v_0\cos\left(t\sqrt{k/m}\right).$$

Время t_1 движения машины до полной остановки определяем из условия $v=v_1=v_0\cos(t_1\sqrt{k/m})=0$. Так как $v_0\neq0$, то$\cos(t_1\sqrt{k/m})=0$и $t_1\sqrt{k/m}=\pi/2$, откуда $t_1=0{,}5\pi\sqrt{k/m}$.

Путь, пройденный машиной на заключительной стадии движения,

$$s = s_1 = v_0\sqrt{m/k}\,\sin\left(t_1\sqrt{k/m}\right) = v_0\sqrt{m/k}\,\sin(\pi/2) = v_0\sqrt{m/k}\,.$$

Ответ: $t_1 = 0{,}5\pi\sqrt{m/k}\,;\ \ s_1 = v_0\sqrt{m/k}\,.$

12.2. Определить силу трения F_f между заторможенными колесами неподвижного автосамосвала и грунтом при разгрузке кузова (рис. 12.2, а),а также суммарное давление F_n автомобиля на грунт, если скольжение груза по днищу кузова определяется законом $s=at^2/2$ и известны: масса груза m_1=10 т; масса машины без груза m_2=21 т; угол α=50°; параметр a=3,7 м/с.

Решение. На механическую систему автосамосвал - груз действуют следующие внешние силы (рис. 12.2, б): сила тяжести m_1g груза; сила тяжести m_2g машины; нормальные реакции F'_n и F''_n грунта и силы сцепления F'_f и F''_f колес с грунтом,приложенные соответственно к передней и задней колесным парам.

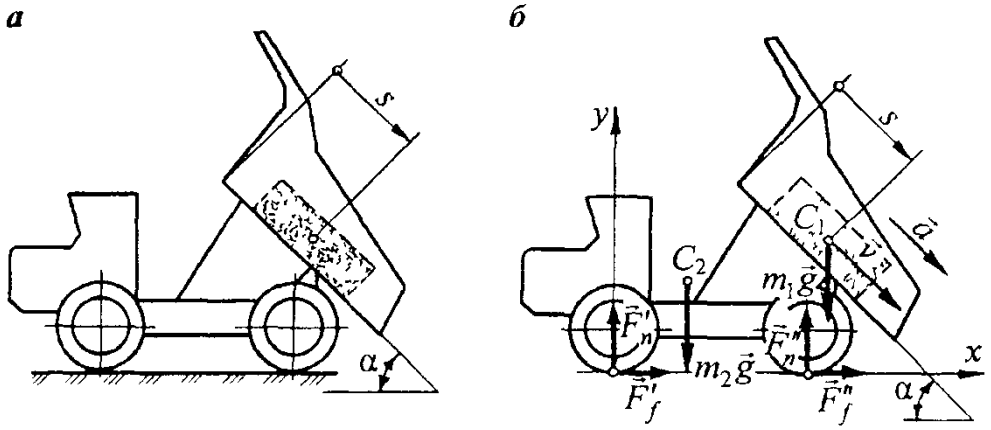


Рис. 12.2

При разгрузке машины движется только груз по плоской поверхности днища кузова, а самосвал остается неподвижным, удерживаемый на месте силами трения, поэтому количество движения системы равно количеству движения груза: $Q=Q_1=m_1v$.

Движение груза - поступательное из начального неподвижного положения, а заданный закон перемещения груза соответствует закону равноускоренного движения при s_0=0 и v_0=0. Следовательно, параметр a есть величина ускорения груза.

Применяя теорему об изменении количества движения системы, получаем

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1v_x) = F'_f + F''_f,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1v_y) = -m_1g - m_2g + F'_n + F''_n,$$

или

$$m_1a_x = F_f, \qquad m_1a_y = -(m_1+m_2)g + F_n,$$

где a_x и a_y - проекции ускорения, $a_x=a\cos\alpha$, $a_y=-a\sin\alpha$; F_f - суммарная сила трения, $F_f=F_f'+F_f''$; F_n - суммарная реакция грунта, равная суммарному давлению автомобиля на грунт, $F_n=F_n'+F_n''$.

Далее определяем требуемые величины F_f и F_n:

$F_f = m_1a\cos\alpha = 10\ 3{,}7\cos 50° = 23{,}783$ кН,

$$F_n = R_n = (m_1 + m_2)g - m_1 a \sin\alpha =$$
$$= (10 + 21)\,9{,}81 - 10\,3{,}7 \sin 50° = 275{,}766 \text{ кН}.$$

Отметим, что при движении груза по кузову суммарное давление автомобиля на грунт оказывается меньше общей силы тяжести машины и груза на 9,32 %.

Ответ: $F_f = 23{,}783$ кН; $F_n = 275{,}766$ кН.

12.3. Груз 1, подвешенный на канате ОМ и принимаемый за материальную точку, совершает малые колебания в вертикальной плоскости (рис. 12.3, а). Найти суммарную силу трения $\underline{F_f}$ между колесами неподвижного крана 2 и горизонтальной опорной поверхностью, если масса груза m_1=2 т; длина каната l=5 м; начальный угол отклонения каната от вертикали φ=8°; начальная скорость груза v_0=0. Искомую силу трения определить в функции времени.

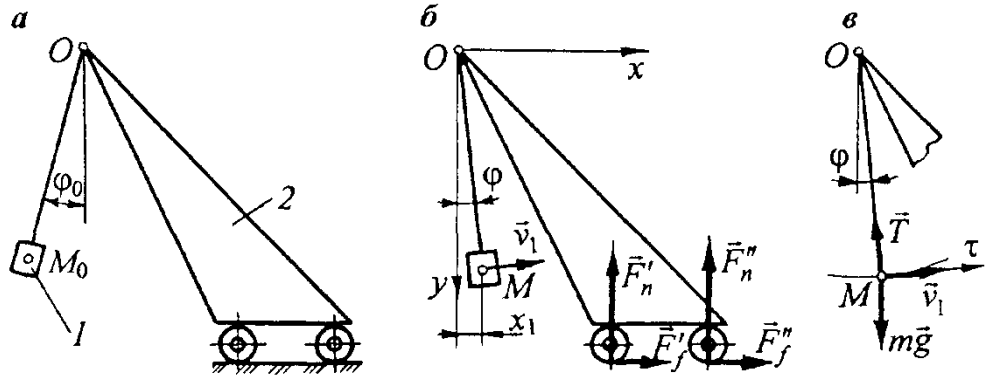


Рис. 12.3

Решение. Если кран неподвижен, а груз качается на невесомом канате (рис. 12.3, б), то количество движения системы равно количеству движения груза, поэтому теорема об изменении количества движения системы в проекции на ось *x* имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_{1x}) = F_f' + F_f'' = F_f,$$

или

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_f,$$

где v_{1x} и x''_1- горизонтальные проекции скорости и ускорения груза, принимаемого за материальную точку; F_f' и F_f''- силы трения передней и задней пары колес крана; F_f- суммарная сила трения.

При малых колебаниях груза, когда угол φ отклонения каната от вертикали не превышает значения φ_0=8°, можно считать $\sin\varphi = \varphi$, тогда $x = l\sin\varphi = l\varphi$, $x'' = l\varphi''$ и $F_f = m_1 l\varphi''$.

Чтобы найти зависимость $\varphi(t)$, рассмотрим отдельно движение груза, на который кроме силы тяжести $m_1 g$ действует сила Т натяжения каната (рис. 12.3, в). Определение величины T в задаче не ставится, поэтому уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения груза, записываем в проекции на касательную к траектории последнего, отсчитывая угол φ от вертикали в направлении против хода часовой стрелки:

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_1) = -m_1 g \sin\varphi.$$

Но

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{d}{dt}(l\varphi) = l\dot{\varphi}\text{, а } \sin\varphi \approx \varphi,$$

следовательно,

$$m_1 l\ddot{\varphi} = -m_1 g\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Характеристическое уравнение $u_2+g/l=0$ имеет мнимые корни $u = \pm i\sqrt{g/l}$, значит, общее решение уравнения выглядит следующим образом:

$$\varphi = C_1 \cos\left(t\sqrt{g/l}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{g/l}\right),$$

откуда

$$\dot{\varphi} = -C_1\sqrt{g/l}\sin\left(t\sqrt{g/l}\right) + C_2\sqrt{g/l}\cos\left(t\sqrt{g/l}\right).$$

При $t=t_0=0$ имеем $\varphi(0)=-\varphi_0$, $\varphi(0)=v_0/l=0$. Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем

$$-\varphi_0 = C_1, \quad 0 = C_2\sqrt{g/l}, \quad \text{т. е. } C_1 = -\varphi_0,\ C_2 = 0.$$

Тогда

$$\varphi = -\varphi_0 \cos\left(t\sqrt{g/l}\right),$$

$$\ddot{\varphi} = \varphi_0(g/l)\cos\left(t\sqrt{g/l}\right).$$

Теперь искомая функция $F_f=F_f(t)$принимает вид

$$F_f \approx m_1 l\ddot{\varphi} = m_1\varphi_0 g\cos\left(t\sqrt{g/l}\right) =$$

$$= 2\left(8°\frac{\pi}{180°}\right)9{,}81\cos\left(t\sqrt{9{,}81/5}\right) = 2{,}74\cos(1{,}4t).$$

Ответ: $F_f \approx m_1\varphi_0 g\cos\left(t\sqrt{g/l}\right) = 2{,}74\cos(1{,}4t)$ (кН).

Практическая работа №13
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: первая производная по времени от количества движения системы равна геометрическойсумме (главному вектору R^e) всех действующих на систему внешних сил, т.е.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{i}\vec{F}_k^e = \vec{R}^e,$$

где *к=1,...,i*- порядковый номер внешней силы; *i*- число действующих на систему внешних сил.

В проекциях на декартовые координатные оси уравнение принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ_x}{dt} &= \sum_{k=1}^{i}F_{kx}^e = R_x^e,\\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum_{k=1}^{i}F_{ky}^e = R_y^e,\\ \frac{dQ_z}{dt} &= \sum_{k=1}^{i}F_{kz}^e = R_z^e.\end{aligned}\right\}$$

В интегральной форме теорему об изменении количества движения системы

выражают уравнением

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{i} \vec{S}_k^e,$$

т.е. изменение количества движения системы за конечный промежуток времени t равно геометрической сумме импульсов S_k^e внешних сил, действующих на систему, за тотже промежуток времени. Импульс S_k^e силы F_k^e за промежуток времени t представляет собой интеграл

$$\vec{S}_k^e = \int_0^t \vec{F}_k^e \, dt.$$

В декартовых координатах уравнение имеет вид

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{i} S_{kx}^e; \; Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{i} S_{ky}^e; \; Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{i} S_{kz}^e.$$

13.1. Определить горизонтальную и вертикальную реакции фундамента кривошипного пресса для брикетирования угля (рис. 13.1), если кривошип ОА вращается вместе с маховиком с постоянной угловой скоростью ω. Шатун АВ считать однородным стержнем массой m_1, масса поршня В равна m_2, общая масса пресса m; размеры: $l_{OA}=r$, $l_{AB}=l$, причем $r/l<1$

Указание. При определении законов движения центров масс шатуна и поршня использовать приближенную формулу для вычисления квадратного корня:

$$\sqrt{1-x} \approx 1-0{,}5x, \quad \text{если} \quad x<<1.$$

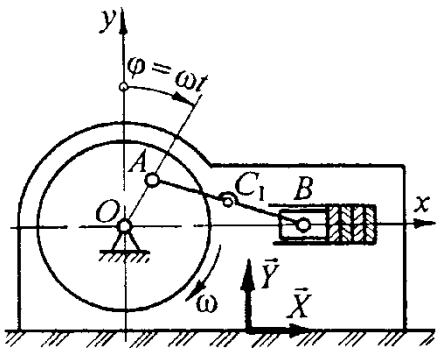


Рис. 13.1

Решение. Для определения реакций фундамента применяем дифференциальную форму теоремы об изменении количества движения в проекциях на декартовы координатные оси. За начало координат принимаем центр О вращения кривошипа, а горизонтальную ось Ох направляем вправо от центра.

Поршень В совершает возвратно-поступательное движение, при этом его центр масс (точка В) перемещается по оси Ох. Координаты точки В:

$$x_B = OB = OA\sin\varphi + \sqrt{(AB)^2 - (OA\cos\varphi)^2} =$$

$$= r\sin\omega t + \sqrt{l^2 - (r\cos\omega t)^2} = r\sin\omega t + l\sqrt{1 - [(r/l)\cos\omega t]^2},$$

$$y_B = 0.$$

По условию задачи $r/l<1$, следовательно, и $[(r/l)\cos\omega t]<1$, поэтому

воспользуемся формулой для приближенного вычисления квадратного корня (см. указание в условии задачи). Тогда закон движения поршня принимает вид

$$x_B = r\sin\omega t + l\{1 - 0{,}5[(r/l)\cos\omega t]^2\} =$$
$$= r\sin\omega t + l - 0{,}5(r^2/l)\cos^2\omega t.$$

Скорость поршня

$$v_B = \dot{x}_B = r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\,2\cos\omega t\sin\omega t =$$
$$= r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t).$$

Координаты центра масс C_1шатуна AB:

$$x_{C_1} = OA\sin\varphi + 0{,}5\sqrt{(AB)^2 - (OA\cos\varphi)^2} =$$
$$= r\sin\omega t + 0{,}5\sqrt{l^2 - (r\cos\omega t)^2} = r\sin\omega t + 0{,}5l\sqrt{1 - [(r/l)\cos\omega t]^2} =$$
$$= r\sin\omega t + 0{,}5l\{1 - 0{,}5[(r/l)\cos\omega t]^2\} =$$
$$= r\sin\omega t + 0{,}5l - 0{,}25(r^2/l)\cos^2\omega t,$$
$$y_{C_1} = 0{,}5r\cos\omega t.$$

Проекции скорости точки C_1.

$$\dot{x}_{C_1} = r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$
$$y_{C_1} = -0{,}5r\omega\sin\omega t$$

Внешние силы, действующие на пресс: mg- сила тяжести пресса, включающая в себя силы тяжести m_1gи m_2gшатуна и поршня соответственно; X- горизонтальная и Y- вертикальная составляющие реакции фундамента. Центр О масс маховика неподвижен.

Проекции количества движения рассматриваемой системы на координатные оси:

$$Q_x = \sum_{j=1}^{2} m_j v_{jx} = m_1\dot{x}_{C_1} + m_2 v_B = m_1[r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] +$$
$$+ m_2[r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] =$$
$$= (m_1 + m_2)\,r\omega\cos\omega t + 0{,}5(0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$
$$Q_y = \sum_{j=1}^{2} m_j v_{jy} = m_1\dot{y}_{C_1} + 0 = -0{,}5m_1r\omega\sin\omega t.$$

Подставляем значения проекций количества движения и проекций внешних сил в уравнения:

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\,r\omega\cos\omega t + 0{,}5(0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] = X,$$
$$\frac{d}{dt}[-0{,}5m_1r\omega\sin\omega t] = Y - mg,$$

откуда

$$X = -(m_1 + m_2)\,r\omega^2\sin\omega t + (0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega^2/l)\cos(2\omega t)] =$$
$$= r\omega^2[-(m_1 + m_2)\sin\omega t + (r/l)(0{,}5m_1 + m_2)\cos(2\omega t)],$$
$$Y = mg + [-0{,}5m_1r\omega^2\cos\omega t] = mg - 0{,}5m_1r\omega^2\cos\omega t.$$

Максимальныезначения реакций:

при $\varphi = \omega t = \pi/2$

$$|X| = |X_{\max}| = r\omega^2\left[m_1 + m_2 + r\left(0{,}5m_1 + m_2\right)/l\right],$$

при $\varphi = \omega t = \pi$

$$|Y| = |Y_{\max}| = mg + 0{,}5m_1 r\omega^2.$$

Ответ: $X = r\omega^2[-(m_1 + m_2)\sin\omega t + (r/l)(0{,}5m_1 + m_2)\cos(2\omega t)]$;

$Y = mg - 0{,}5m_1 r\omega^2 \cos\omega t$;

$|X_{\max}| = r\omega^2\left[m_1 + m_2 + r\left(0{,}5m_1 + m_2\right)/l\right]$;

$|Y_{\max}| = mg + 0{,}5m_1 r\omega^2$.

13.2. Определить горизонтальную и вертикальную реакции фундамента двухкривошипного пресса для брикетирования угля (рис. 13.2), если кривошипы OA и OA' смещены на 180° относительно друг друга и вращаются вместе с маховиком с постоянной угловой скоростью ω. Шатуны AB и A'B' считать однородными стержнями массой m_1каждый; массы поршней B и B' также одинаковы: $m_B = m_{B'} = m_2$, общая масса пресса m, размеры: $l_{OA} = l_{OA'} = r$, $l_{AB} = l_{A'B'} = l$,причем $r/l < 1$.

<u>*Указание*</u>.При определении законов движения центров масс шатунов и поршней использовать приближенную формулу для вычисления квадратного корня:

$\sqrt{1-x} \approx 1 - 0{,}5x$, если $x << 1$.

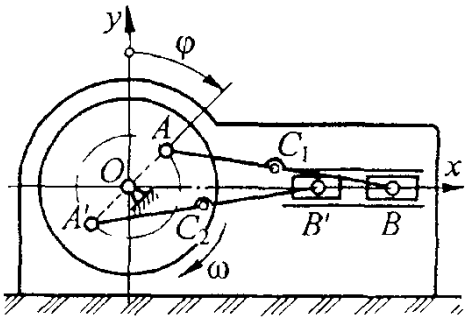


Рис. 13.2

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, для определения реакций фундамента применяем дифференциальную форму теоремы об изменении количества движения в проекциях на декартовы координатные оси, принимая за начало координат центр O вращения маховика и направляя горизонтальную ось Ox вправо от центра. В отличие от механической системы, рассматриваемый механизм содержит не два, а четыре звена (два ползуна и два кривошипа), количество движения которых учитывается при определении количества движения системы.

Находим скорости центров масс подвижных звеньев.

Центр O масс маховика с кривошипами OA и OA' неподвижен.

Поршни B и B' совершают возвратно-поступательное движение, при этом их центры масс (точки B и B') перемещаются по оси Ox.

Координаты точки B (см. решение задачи 13.1):

$$x_B = r\sin\omega t + l - 0{,}5(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_B = 0.$$

По аналогии определяем координаты точки B':

$$x_{B'} = -r\sin\omega t + l - 0{,}5(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_{B'} = 0.$$

Скорости поршней:

$$v_B = \dot{x}_B = r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$

$$v_{B'} = \dot{x}_{B'} = -r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t).$$

Координаты центра масс C_1шатуна АВ находим по формулам, полученным в решении задачи 13.1:

$$x_{C_1} = r\sin\omega t + 0{,}5l - 0{,}25(r^2/l)\cos^2\omega t, \qquad y_{C_1} = 0{,}5r\cos\omega t.$$

Координаты центра масс C_2шатуна A'B' (по аналогии):

$$x_{C_2} = -r\sin\omega t + 0{,}5l - 0{,}25(r^2/l)\cos^2\omega t, \qquad y_{C_2} = -0{,}5r\cos\omega t.$$

Проекции скоростей центров масс C_1и C_2.

$$\dot{x}_{C_1} = r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t), \qquad \dot{y}_{C_1} = -0{,}5r\omega\sin\omega t,$$

$$\dot{x}_{C_2} = -r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t), \qquad \dot{y}_{C_2} = 0{,}5r\omega\sin\omega t.$$

Внешние силы, действующие на пресс: mg- сила тяжести пресса, включающая в себя силы тяжести корпуса пресса, маховика с кривошипами, шатунов и поршней; X - горизонтальная иY- вертикальная составляющие реакции фундамента.

Проекции количества движения рассматриваемой системы на координатные оси:

$$Q_x = \sum_{j=1}^{4} m_j v_{jx} = m_1\dot{x}_{C_1} + m_1\dot{x}_{C_2} + m_2 v_B + m_2 v_{B'} =$$

$$= m_1[r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t) - r\omega\cos\omega t +$$

$$+ 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] + m_2[r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t) -$$

$$- r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] = (0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$

$$Q_y = \sum_{j=1}^{4} m_j v_{jy} = m_1\dot{y}_{C_1} + m_1\dot{y}_{C_2} + 0 + 0 =$$

$$= -0{,}5m_1 r\omega\sin\omega t + 0{,}5m_1 r\omega\sin\omega t = 0.$$

Подставляем значения проекций количества движения и проекций внешних сил в уравнения:

$$\frac{d}{dt}[(0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] = X,$$

$$0 = Y - mg,$$

откуда

$$X = (r^2\omega^2/l)(m_1 + 2m_2)\cos(2\omega t), \quad Y = mg.$$

Ответ: $X = (r^2\omega^2/l)(m_1 + 2m_2)\cos(2\omega t)$; $Y = mg$.

13.3. На одном из этапов работы погрузочной машины рукоять 2, несущая ковш 3 с грузом, перекатывается без проскальзывания по горизонтальной плоскости корпуса 7 и в конце пути ударяется об упоры 4, после чего груз из ковша пересыпается в вагонетку 5 (рис. 13.3). Известны: угловая скорость ω рукояти в момент удара; скорость v корпуса с вагонеткой в этот же момент, а также общая масса mвсей машины с грузом; масса m_1рукояти и ковша с грузом; расстояние h от их общего центра масс до плоскости корпуса. Определить скорость uмашины по окончании пересыпания груза; вредными сопротивлениями движению машины пренебречь.

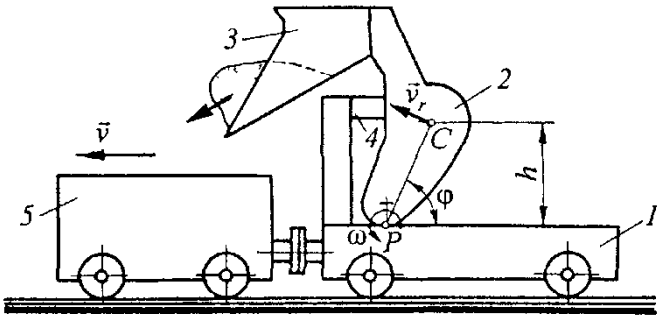


Рис. 13.3

Решение. В процессе разгрузки на рассматриваемую механическую систему действуют только вертикальные силы (силы тяжести и нормальные реакции опоры), т.е. сумма проекций всех действующих внешних сил на горизонтальную ось *x* равна нулю.

Тогда в соответствии с законом сохранения количества движения системы (см. [2, § 112]) проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Скорость v_C общего центра С масс рукояти с ковшом и грузом до удара рукояти об упоры складывается из переносной скорости v корпуса и окружной относительной скорости v_r при перекатывании рукояти по плоскости корпуса, т.е. в процессе поворота рукояти вокруг МЦС (точки Рее контакта с корпусом):

$$\vec{v}_C = \vec{v} + \vec{v}_r.$$

Проекция скорости v_C на ось x

$$v_{Cx} = v + v_{rx} = v + v_r \sin\varphi = v + \omega R \sin\varphi = v + \omega h.$$

Проекция количества движения системы до удара рукояти об упоры на эту же ось

$$Q_{x0} = (m - m_1)\, v + m_1 v_{Cx} = (m - m_1)\, v + m_1 (v + \omega h) = mv + m_1 \omega h.$$

После удара (по окончании пересыпания груза) вся система движется с горизонтальной скоростью и, поэтому проекция количества движения

$$Q_x = mu.$$

Но, как указывалось выше, $Q_{x0} = Q_x = \text{const}$, поэтому

$$mv + m_1 \omega h = mu,$$

откуда $u = v + (m_1/m) h\omega$.

Ответ: $u = v + (m_1/m) h\omega$.

Практическая работа №14
РАБОТА СИЛЫ

Элементарная работа силы

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz,$$

или

$$dA = F\, ds \cos\alpha.$$

Здесь *dr*- вектор элементарного перемещения точки приложения силы *F*; *dx*, *dy*, *dz*- его проекции на координатные оси; *ds*- элементарный путь данной точки; *X*, *Y*, *Z* -проекции силы; α - угол между направлениями векторовсилы *F*и скорости ν.

Полная работа силы на конечном перемещении точки ее приложения выражается криволинейным интегралом

$$A = \int\limits_{(M_0M)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int\limits_{(M_0M)} F\,ds\cos\alpha,$$

где M_0 и M- начальное и конечное положения точки приложения силы.

Работа силы тяжести

$$A = mg(z_0 - z) = \pm mgh.$$

Здесь $h=(z_o-z)$;z_oиz- начальная и конечная координаты точки приложения силы; ось z направлена вверх.

Работа силы упругости

$$A = 0{,}5c(\lambda_0^2 - \lambda^2),$$

где c- жесткость упругой связи; λ_o и λ - начальная и конечная ее деформация.

14.1. На наклонный ленточный конвейер (рис. 14.1, а) поступает переменный грузопоток $q(t)$, т/с. Конвейер транспортирует горнуюмассу вверх под углом α к горизонту; скорость ленты v, длина конвейера l, коэффициент сопротивления движению груза μ. В начальный моментвремени конвейер не загружен. Определить работу, затраченную за время t на транспортирование груза.

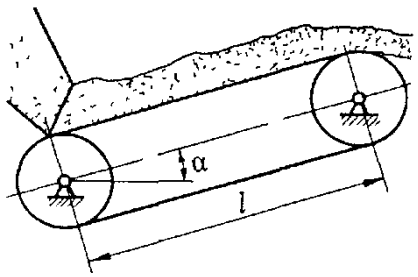


Рис. 14.1, а

Решение. Рассмотрим сначала работу конвейера в начальный период времени, когда $0<t<t_1=l/v$. На рис. 14.1, бпоказано положение горной массы на конвейере по прошествии времени u(с) с момента начала загрузки. Выделим в распределенном на ленте грузе поперечный элемент dx, расположенный на расстоянии xот загрузочной воронки. Поскольку лента проходит путь x за время x/v, то этот элементзагружался в момент времени$t_x=u-x/v$, которому соответствовал грузопоток $q(t_x)=q(u-x/v)$. Следовательно, масса элемента $dm=q(u-x/v)du$(т).

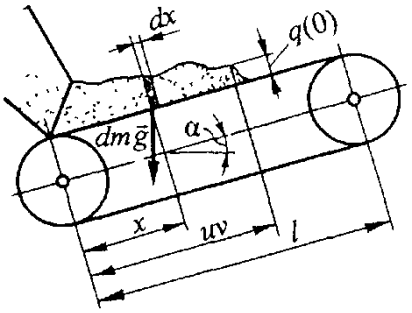


Рис. 14.1, б

Элементарная сила dFсопротивления движению груза dmскладывается из составляющей $dmg\sin\alpha$ силы тяжести (эта составляющая параллельна продольной оси ленты) и силы вредногосопротивления, равной произведению нормального

давления $dmg\cos\alpha$на коэффициент сопротивления μ, т.е.

$$dF = dm\,g\sin\alpha + dm\,g\,\mu\cos\alpha = dm\,g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) =$$
$$= q(u - x/v)\,g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,du.$$

Работа, затраченная па перемещение груза за время t, в течение которого горная масса, поступившая на конвейер в начальный момент времени, пройдет путь, равный vu,

$$A_1 = \int_0^{vu} F\,dx = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_0^{t} du \int_0^{vu} q(u - x/v)\,dx.$$

За время $t_1 = l/v$ лентаконвейера будет загружена на всю длину l, поэтому работа, затраченная на транспортирование горной массы при $t > t_1$, может бытьопределена из выражения

$$A_2 = A_1(t_1) + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_{t_1}^{t} dt \int_0^{l} q(t - x/v)\,dx,$$

где $A_1(t_1)$- работа, подсчитываемая по уравнению при $t = t_1$.

Ответ: 1) при $0 \le t \le t_1 = l/v$

$$A_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_0^{t} du \int_0^{vu} q(u - x/v)\,dx \text{ (кДж);}$$

2) при $t > t_1 = l/v$

$$A_2 = A_1(t_1) + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_{t_1}^{t} dt \int_0^{l} q(t - x/v)\,dx \text{ (кДж),}$$

где g – ускорение свободного падения.

14.2. Определить приведенный коэффициент сопротивления движению вагонетки при следующих данных: m- общая масса вагонетки вместе с колесами и грузом; m_1 - общая масса колес; f - коэффициент трения в подшипниках колес; k- коэффициент трения качения колес по рельсам; r- радиус цапф; R- радиус колес; вагонетка движется равномерно по горизонтальному прямолинейному пути.

В качестве приведенного коэффициента сопротивления движению вагонетки (клети и т.п.) используется величина $f_n = F_c/F_n$, где F_c- сила сопротивления движению вагонетки, приведенная к кузову (при поступательном его движении); F_n- сумма действующих на колеса вагонетки нормальных реакций рельсов (опоры). Сила F_c- направленная противоположно скорости кузова воображаемая сила, мощность которой равна сумме мощностей всех сил вредных сопротивлений движению вагонетки.

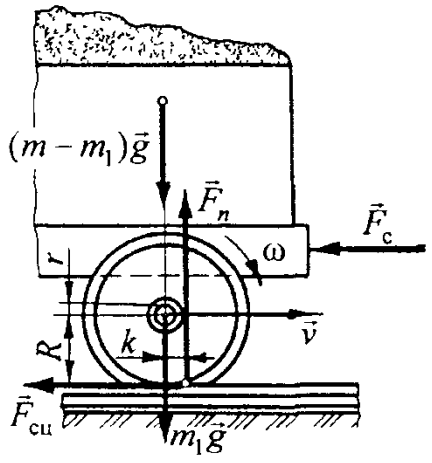


Рис. 14.2

Решение. Определим сначала мощность P_{Fc}приведенной силы сопротивления, равную сумме мощностей всех сил вредных сопротивлений движению вагонетки (в данном случае - моментов сил трения скольжения цапф по подшипникам и моментов пар сил трения качения колес по рельсам). Не изменяя баланса мощности, можем принять, что все нагрузки приходятся на одну цапфу (рис. 14.2).

Если скорость движения вагонетки обозначить через v, то угловая скорость колеса $\omega = v/R$. Тогда

$$P_{F_c} = -F_c v = -F_f r\omega - F_n k\omega,$$

откуда

$$F_c = (F_f r + F_n k)\omega / v = (F_f r + F_n k)/R.$$

Но

$$F_f = (m - m_1)g f; \quad F_n = (m - m_1)g + m_1 g = mg,$$

поэтому

$$F_c = [(m - m_1)g f r + mg k]/R.$$

Теперь находим приведенный коэффициент сопротивления:

$$f_п = F_c / F_n = [(1 - m_1/m) f r + k]/R.$$

Ответ: $f_п = [(1 - m_1/m) f r + k]/R$.

14.3. Поршень 1 ударно-поворотного механизма пневмо-перфоратора (рис. 14.3) движется под действием постоянной силы *F*давления сжатого воздуха. В процессе движения поршень за счет винтовой пары 2 поворачивается вокруг своей осиотносительно корпуса 3 и вращает при этом обойму 4, в которой закреплен инструмент. Заданы: масса *m*поршня, суммарный момент инерции *J*поршня с обоймой, ход винта *h*. Пренебрегая сопротивлениями, определить скорость и ускорение поршня как функцию его пути *s*.

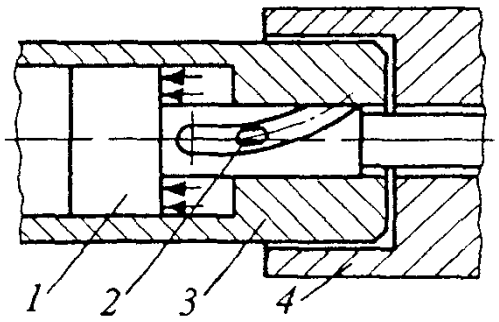


Рис. 14.3

Решение. Под действием силы *F*поршень совершает сложное движение, состоящее из поступательного со скоростьюv вдоль собственной оси и вращательного с угловой скоростью ω вместе с обоймой и инструментом за счет взаимодействия кулачков корпуса с винтовыми пазами поршня.

Кинетическая энергия поршня в поступательном движении $T_П = 0{,}5mv^2$, во

вращательном - $T_B=0{,}5J\omega^2$.

Найдем зависимость между ω и v. Обозначая осевое перемещение поршня через *s*, а угол его поворота через φ, получим

$$v = ds/dt \quad \text{и} \quad \omega = d\varphi/dt,$$

откуда

$$ds = (v/\omega)\, d\varphi.$$

Отсчитывая угол поворота и осевое перемещение от нуля, находим $s = (v/\omega)\varphi$.

Ходом винта называется его осевое перемещение за один полный оборот, т.е. при $\varphi=2\pi$ получаем $s=h$. Следовательно,

$$h = (v/\omega)\, 2\pi,$$

а зависимость $\omega=\omega(v)$ имеет вид

$$\omega = (2\pi/h)\, v.$$

Тогда полная кинетическая энергия поршня с обоймой и инструментом

$$T = T_{\text{п}} + T_{\text{в}} = 0{,}5mv^2 + 0{,}5J\omega^2 = 0{,}5v^2[m + J(2\pi/h)^2].$$

В соответствии с заданием сопротивлениями при движении поршня пренебрегаем. Поскольку никаких указаний о пространственном положении перфоратора в условии не дано, то ось поршня считаем горизонтальной, поэтому работа его силы тяжести равна нулю. Теперь, учитывая, что работа действующей вдоль оси поршня силы *F* на перемещении *s* равна *Fs*, а начальное значение кинетической энергии $T_0=0$, получаем в соответствии с уравнением, следующее выражение для теоремы об изменении кинетической энергии поршня:

$$0{,}5v^2[m + J(2\pi/h)^2] = Fs,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{m + 4\pi^2 J/h^2}}.$$

Чтобы найти ускорение, выразим предварительно его через производную скорости по перемещению:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}.$$

Тогда

$$a = \sqrt{\frac{2Fs}{m + 4\pi^2 J/h^2}}\ \frac{d}{ds}\sqrt{\frac{2Fs}{m + 4\pi^2 J/h^2}} = \frac{2F\sqrt{s}}{m + 4\pi^2 J/h^2}\ \frac{d\sqrt{s}}{ds} =$$

$$= \frac{2F\sqrt{s}}{m + 4\pi^2 J/h^2}\ \frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{F}{m + 4\pi^2 J/h^2} = \text{const}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2Fs}{m + 4\pi^2 J/h^2}}$; $\quad a = \dfrac{F}{m + 4\pi^2 J/h^2}$.

Практическая работа №15
КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ

Кинетической энергией материальной точки называют скалярную меру механического движения, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Кинетическая энергия системы - это сумма кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2,$$

где $i=1, ..., n$ - порядковый номер точки; n - число точек системы; m_i - масса i-й точки; ν - ее скорость.

В различных случаях движения тела его кинетическую энергию вычисляют по следующим формулам.

1.При поступательном движении

$$T = 0{,}5mv^2,$$

где m- общая масса тела; ν - его скорость.

2.При вращательном движении

$$T = 0{,}5J_z\omega^2,$$

где J_z- момент инерции тела относительно оси z его вращения; ω - угловая скорость тела.

3.При плоскопараллельном движении

$$T = 0{,}5J_P\omega^2 = 0{,}5(mv_C{}^2 + J_C\omega^2),$$

где J_P- момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной направляющей плоскости (т.е. плоскости, в которой движется центр масс С) и проходящей через мгновенный центр скоростей Р; v_c- скорость центра масс С; J_C - момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной направляющей плоскости.

4.При сферическом движении

$$T = 0{,}5(J_x\omega_x{}^2 + J_y\omega_y{}^2 + J_z\omega_z{}^2) - (J_{xy}\omega_x\omega_y + J_{yz}\omega_y\omega_z + J_{zx}\omega_z\omega_x).$$

Осевыеи центробежные моменты инерции вычисляют относительно осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.

5. В общем случае движения свободного тела (формула Кёнига)

$$T = 0{,}5mv_C{}^2 + T',$$

где T' - кинетическая энергия в сферическом движении вокруг центра масс.

Формула справедлива для любой (в том числе изменяемой) механической системы, при этом T' - кинетическая энергия системы в ее движении относительно осей, перемещающихся поступательно вместе с центром масс.

Первая производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему (дифференциальная форма теоремы):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{k} P_j^e + \sum_{q=1}^{\upsilon} P_q^i,$$

где j=1, ..., k - порядковый номер внешней силы; P_i^e–еемощность; k - число действующих на систему внешних сил;q=1, ..., υ - порядковый номер внутренней силы; P_q^i– еемощность; υ - число действующих на систему внутренних сил.

Уравнение следует применять в тех случаях, когда задано или требуется найти ускорение тела - линейное (при поступательном движении тела) или угловое (при вращательном движении).

Изменение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил на этом же перемещении (конечная, или интегральная, форма теоремы):

$$T - T_0 = \sum_{j=1}^{k} A_j^e + \sum_{q=1}^{\upsilon} A_q^i.$$

Уравнение следует применять в тех случаях, когда действующие на систему силы постоянны по модулю и по направлению либо для них существует силовая функция (см. ниже), а в число заданных и искомых механических величин входят кроме этих сил только скорости (линейные или угловые) и перемещения (поступательные или угловые) тел, входящих в рассматриваемую систему. Если хотя бы одна заданная переменная сила зависит от скорости, то необходимо использовать уравнение.

Сила потенциальна, если ее проекции

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где $U=U(x, y, z)$ - потенциальная (силовая) функция, т.е. такая функция от координат x, y, z, дифференциал которой равен элементарной работе.

Потенциальная энергия $П=-U$. Потенциальная энергия, как и силовая функция, зависит от координат всех точек системы. Механическая система, в которой работа совершается только потенциальными силами, называется консервативной.

Полная механическая энергия консервативной системы остается величиной постоянной:

$$E = T + П = \text{const}.$$

15.1. Колесо 1 погрузочной машины приводится в движение посредством планетарного механизма, состоящего из зубчатых колес 2, 3', 3'', 4, последнее из которых имеет массу m_4и жестко связано с поступательно движущимся корпусом 5 машины (рис. 15.1, а). Известны радиусы колес $r_1=R$, r_2, $r_{3'}=r_{3''}=r_3$, их массы m_1, m_2, $m_{3'}=m_{3''}=m_3$, момент инерции J_1колеса 1 относительно его центральной оси С. Колеса 2, 3' и 3'' допустимо считать сплошными однородными дисками. Определить кинетическую энергию колеса, если скорость корпуса 5 равна ν, а качение колеса 1

происходит без проскальзывания.

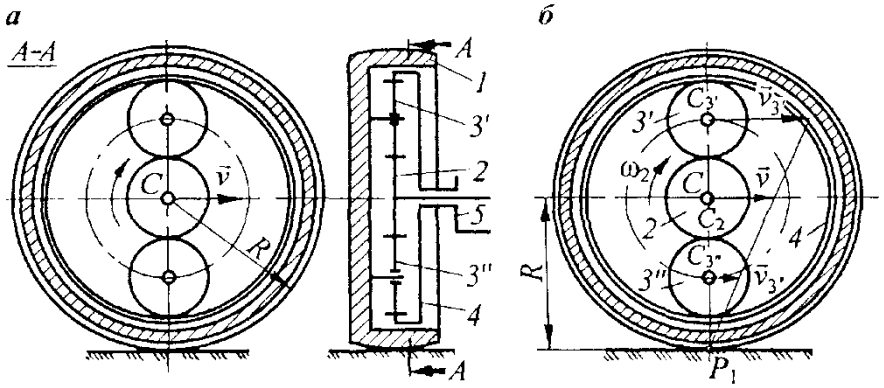


Рис. 15.1

Решение. Рассматриваемая механическая система состоит из пяти подвижных тел, поэтому ее кинетическая энергия

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_{3'} + T_4,$$

где T_1- кинетическая энергия колеса 1, являющегося водилом планетарного механизма; T_2 - кинетическая энергия центрального (солнечного) колеса 2; $T_{3'}$ и $T_{3''}$ - кинетическая энергия соответственно сателлитов 3' и 3''; T_4- кинетическая энергия коронного колеса 4, жестко связанного с корпусом машины.

Кинетическая энергия корпуса машины с установленным на нем оборудованием здесь не рассматривается.

Колесо 1 перекатывается по дороге без скольжения, его центр масс С движется со скоростью v корпуса. Угловую скорость ω_1 определяем с учетом положения мгновенного центра вращения колеса в точке Λ контакта последнего с дорогой (рис. 15.1,б):

$$\omega_1 = v_C / P_1C = v / R.$$

По формуле имеем

$$T_1 = 0{,}5(m_1 v_C^2 + J_1\omega_1^2) = 0{,}5(m_1 + J_1/R^2)\, v^2.$$

Для определения величин T_2, $T_{3'}$ *и* $T_{3''}$необходимо предварительно найти угловые скорости колес 2, 3' и 3'', что можно сделать с помощью метода обращения движения, называемого иногда методом остановки, или методом Виллиса (см. [2,§70]). Сообщим мысленно всей системе дополнительную угловую скорость $-\omega_1$ вокруг мгновенного центра вращения P_1, равную по модулю и противоположную по направлению угловой скорости колеса 1. Тогда в этом сложном движении колесо 1 будет неподвижно, а солнечное колесо 2, сателлиты 3' и 3'' и коронное колесо 4 получат мгновенное вращение вокруг неподвижных осей с относительными угловыми скоростями соответственно

$$\omega_2 - \omega_1,\ \ \omega_3 - \omega_1 \ \ \text{и} \ \ \omega_4 - \omega_1 = 0 - \omega_1 = -\omega_1.$$

Поскольку отношение угловых скоростей колес зубчатой передачи с неподвижными осями обратно пропорционально их радиусам, причем это отношение положительно для внутреннего зацепления колес 3-4 и отрицательно для внешнего зацепления колес 2-3, то

$$(\omega_3 - \omega_1)/(\omega_4 - \omega_1) = r_4/r_3,$$
$$(\omega_2 - \omega_1)/(\omega_3 - \omega_1) = -r_3/r_2.$$

Но $\omega_4 - \omega_1 = -\omega_1$, а $r_4 = r_2 + 2r_3$, поэтому

$$(\omega_3 - \omega_1)/(-\omega_1) = (r_2 + 2r_3)/r_3,$$

откуда при $\omega_1 = v / R$

$$\omega_3 = -\omega_1(r_2 + r_3)/r_3 = -v(r_2 + r_3)/(r_3 R).$$

Подставляем значение ω_3 в формулу:

$$(\omega_2 - \omega_1)/[-\omega_1(r_2 + r_3)/r_3 - \omega_1] = -r_3/r_2,$$

Откуда

$$\omega_2 = 2\omega_1(r_2 + r_3)/r_2 = 2v(r_2 + r_3)/(r_2 R).$$

Центр масс C_2солнечного колеса 2, совершающего плоскопараллельное движение, перемещается со скоростью корпуса, т.е. $v_c = v$. Момент инерции этого колеса, принимаемого засплошной однородный диск, $J_2 = m_2 r_2^2/2$, а его кинетическая энергия

$$T_2 = 0{,}5(m_2 v_{C_2}^2 + J_2\omega_2^2) = 0{,}5\{m_2 v^2 + (m_2 r_2^2/2)[2v(r_2 + r_3)/(r_2 R)]^2\} =$$
$$= 0{,}5 m_2 v^2[1 + 2(r_2 + r_3)^2/R^2\}.$$

Сателлиты 3' и 3" имеют одинаковые угловые скорости ω_3, но линейные скорости $v_{3'}$и $v_{3''}$ их центров различны. Оси сателлитов жестко связаны с водилом (колесом 1), поэтому значения скоростей $v_{3'}$ и $v_{3''}$ находим, рассматривая движение водила вокруг мгновенного центра вращения (см. рис. 15.1, б):

$$v_{3'} = \omega_1(P_1 C_{3'}) = (v / R)(R + r_2 + r_3),$$
$$v_{3''} = \omega_1(P_1 C_{3''}) = (v / R)(R - r_2 - r_3).$$

Сателлиты тоже считаем сплошными однородными дисками, поэтому $J_3 = m_3 r_3^2/2$, а кинетическая энергия:

$$T_{3'} = 0{,}5(m_3 v_{3'}^2 + J_3\omega_3^2) =$$
$$= 0{,}5\{m_3[(v / R)(R + r_2 + r_3)]^2 + (m_3 r_3^2/2)[-v(r_2 + r_3)/(r_3 R)]^2\} =$$
$$= 0{,}5 m_3 v^2[1 + 2(r_2 + r_3)/R + 1{,}5(r_2 + r_3)^2/R^2],$$
$$T_{3''} = 0{,}5(m_3 v_{3''}^2 + J_3\omega_3^2) =$$
$$= 0{,}5\{m_3[(v / R)(R - r_2 - r_3)]^2 + (m_3 r_3^2/2)[-v(r_2 + r_3)/(r_3 R)]^2\} =$$
$$= 0{,}5 m_3 v^2[1 - 2(r_2 + r_3)/R + 1{,}5(r_2 + r_3)^2/R^2].$$

Кинетическую энергию коронного колеса 4, движущегося поступательно вместе с корпусом, определяем по формуле:

$$T_4 = 0{,}5 m_4 v^2.$$

Теперь, суммируя значения величин, полученных в уравнениях, подсчитываем кинетическую энергию системы

$$T = 0{,}5v^2\{m_1 + m_2 + 2m_3 + m_4 + [J_1 + (2m_2 + 3m_3)(r_2 + r_3)^2] / R^2\},$$

или, вводя обозначение $m = m_1 + m_2 + 2m_3 + m_4$, получаем

$$T = 0{,}5v^2\{m + [J_1 + (2m_2 + 3m_3)(r_2 + r_3)^2] / R^2\}.$$

Ответ: $T = 0{,}5v^2\{m + [J_1 + (2m_2 + 3m_3)(r_2 + r_3)^2] / R^2\}$,

где $m = m_1 + m_2 + 2m_3 + m_4$.

15.2. Определить кинетическую энергию барабана гироскопической мельницы, состоящего из пустотелого цилиндра (обечайки) 1 и двух торцовых крышек 2 (рис. 15.2, а). Общая масса барабана m=80 кг; масса цилиндра m_1=0,75m. Угловая скорость водила мельницы Ω=20 с$^{-1}$; передаточное число $U=z_1/z_2=2$; размеры: l=1,2м, d=0,6м.

*Указание.*Толщину крышек и стенки обечайки допускается считать пренебрежимо малой по сравнению с габаритными размерами барабана.

Решение. Начало координат системы *Cxyz*, показанной на рис. 15.2,а, совпадает с центром масс барабана, а все координатные оси представляют собой оси симметрии этого барабана, по этому они являются главными центральными осями инерции данного тела и его центробежныемоменты инерции J_{xy}, J_{yz}и J_{zx}равны нулю (подробнее см. [2, § 104]). Известно также, что барабан не вращается вокруг оси *Cx*, следовательно, ω_x=0. С учетом этих замечаний формула для определения кинетической энергии барабана принимает вид

$$T = 0{,}5(J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2),$$

где J_yи J_z- главные моменты инерции тела в точке С;

ω_yи ω_z - проекции его полной угловой скорости на соответствующие оси, т.е. угловые скорости вращения барабана вокруг этих осей.

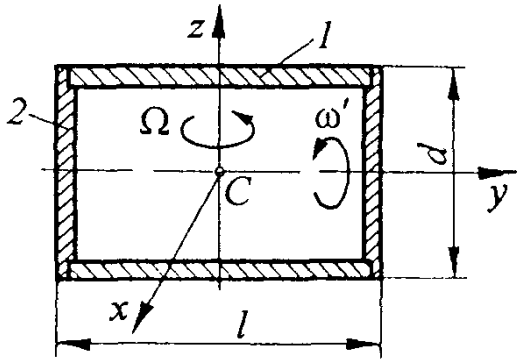


Рис. 15.2, а

Моменты инерции барабана могут быть вычислены с помощью формул, приведенных в справочниках для инженеров, но мы па примере данной задачи покажем, как подсчитать величины этих моментов, учитывая, что при непрерывном распределении масс по всему объему тела момент инерции Jданного тела относительно некоторой оси ξ находят по формуле

$$J_\xi = \int_{(m)} \rho^2 \, dm,$$

где ρ - расстояние рассматриваемого элемента, имеющего массу dm, до оси ξ.

При подсчете моментов инерции будет также использована теорема Гюйгенса - Штейнера: момент инерции J_zтела относительно некоторой оси Ozравен моменту инерции $J_{z'}$ относительно параллельной оси Cz', проходящей через центр С масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния L между осями, т.е.

$$J_z = J_{z'} + mL^2.$$

Моменты инерции барабана находим, считая толщину крышек и стенки цилиндра пренебрежимо малой по сравнению с его наружным диаметром dи длиной l. При таком допущении вся масса m_1обечайки считается распределенной по

поверхности цилиндра, а масса m_2каждой крышки - по плоскости круга диаметром d, расположенного на расстоянии $l/2$от оси Cz.

Так как все точки поверхности цилиндра располагаются на одинаковом расстоянии $d/2$от оси Cy, то момент инерции J_{1y}обечайки 1 относительно этой оси

$$J_{1y} = \int\limits_{(m_1)} (d/2)^2\, dm = \frac{d^2}{4} \int\limits_{(m_1)} dm = \frac{m_1 d^2}{4}.$$

Момент инерции J_{2y}крышки 2 определяем как момент инерции круглой однородной пластины относительно оси Cy, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр C''. Для этого в секторе с центральным углом $d\alpha$выделим элемент крышки, заключенный между дугами окружностей радиусами ρ и ρ+dρ(рис. 15.2, б). Длинаэлемента $\rho d\alpha$, ширина $d\rho$,площадь $\rho d\alpha d\rho$, масса $dm=\gamma_2 \rho d\alpha d\rho$, где $\gamma_2 = m_2/(\pi d^2/4)$-масса единицы площади крышки.

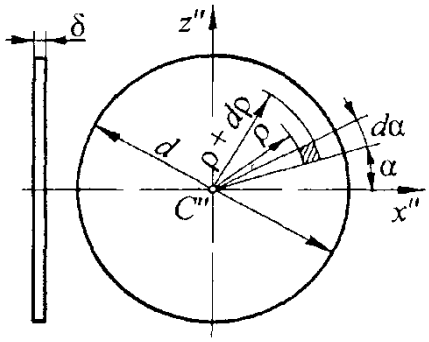


Рис. 15.2, б

Тогда

$$J_{2y} = \int\limits_{(m_2)} \rho^2 dm = \int\limits_{(m_2)} \rho^2 \frac{4m_2}{\pi d^2} \rho \cdot d\alpha \cdot d\rho =$$

$$= \frac{4m_2}{\pi d^2} \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{4m_2}{\pi d^2} \frac{(d/2)^4}{4} 2\pi = \frac{m_2 d^2}{8}.$$

Масса крышки $m_2=(m-m_1)/2=(m-0{,}75m)/2=0{,}125m$. Момент инерции J_yбарабана относительно оси Cy

$$J_y = J_{1y} + 2J_{2y} = \frac{m_1 d^2}{4} + 2\frac{m_2 d^2}{8} = (m_1 + m_2)\frac{d^2}{4} =$$

$$= (0{,}75m + 0{,}125m)\frac{d^2}{4} = \frac{7md^2}{32} = \frac{7 \cdot 80 \cdot 0{,}6^2}{32} = 6{,}3\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для вычисления момента инерции J_{xz}обечайки 1 относительно оси Czвыделим из обечайки кольцевой элемент шириной dy, а на этом кольце - участок массой dm_k, заключенный между плоскостями, содержащими ось Cyи образующими двугранный угол dα(рис. 15.2, в).

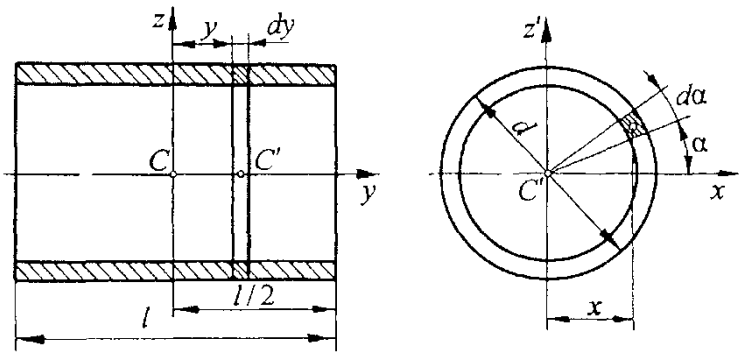


Рис. 15.2, в

Масса кольцевого элемента $m_k=(m_1/l)dy$, где m_1/l- масса единицы длины барабана. Масса элементарного участка кольца $dm_K=[m_K/(2\pi)]d\alpha=[(m_1/(2\pi l)]dyd\alpha$, где $m_K/(2\pi)$ - масса участка кольца, заключенного между плоскостями, содержащими ось Cy и образующими двугранный угол, равный одному радиану. Расстояние $p_к$ от элементарного участка кольца до оси Cz:

$$\rho_к=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2+y^2}\,.$$

Используя формулу, получаем

$$J_{1z}=\int\limits_{(m_к)}\rho_к^2\,dm_к=\int\limits_{-l/2}^{l/2}dy\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d^2}{4}\cos^2\alpha+y^2\right)\frac{m_1}{2\pi l}d\alpha=$$

$$=\frac{m_1}{2\pi l}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\left[\frac{d^2}{4}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)+y^2\alpha\right]\Bigg|_0^{2\pi}dy=$$

$$=\frac{m_1}{2\pi l}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{\pi d^2}{4}+2\pi y^2\right)dy=\frac{m_1}{2\pi l}\left(\frac{\pi d^2}{4}y+2\pi\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-l/2}^{l/2}=$$

$$=\frac{m_1}{2\pi l}\left(\frac{\pi d^2}{4}l+2\pi\frac{l^3}{12}\right)=m_1\left(\frac{d^2}{8}+\frac{l^2}{12}\right).$$

Момент инерции J_{2z} крышки 2 относительно вертикальной оси Czопределяем, найдя сначала момент инерции $J_{z2''}$этой крышки относительно вертикальной оси $C''z''$, проходящей через центр C" (рис. 15.2, г). При этом крышку считаем круглой однородной пластиной, толщина δ которой пренебрежимо мала.

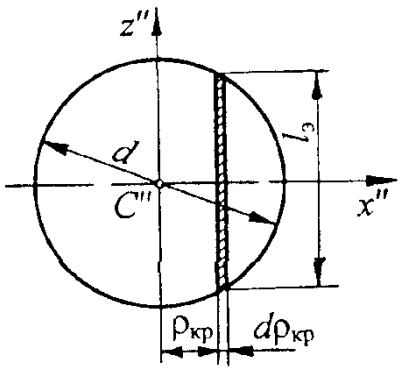


Рис. 15.2, г

На расстоянии $\rho_{кр}$ от оси $C''z''$выделим параллельный ей элемент шириной $d\rho_{кр}$. Длинаэлемента

$$l_3 = 2\sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2},$$

Площадь

$$2\sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2}\, d\rho_{кр},$$

масса

$dm_{кр} = 2\gamma_2 \sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2}\, d\rho_{кр}$, где $\gamma_2 = m_2/(\pi d^2/4)$ - массаединицы площади крышки.

Тогда

$$J_{2z} = \int\limits_{(m_2)} \rho_{кр}^2 dm_{кр} = \int\limits_{(m_2)} \rho_{кр}^2 2\frac{4m_2}{\pi d^2}\sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2}\, d\rho_{кр} =$$

$$= \frac{8m_2}{\pi d^2}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \rho_{кр}^2 \sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2}\, d\rho_{кр} =$$

$$= \frac{8m_2}{\pi d^2}\left\{\frac{\rho_{кр}}{8}\left[2\rho_{кр}^2 - (d/2)^2\right]\sqrt{(d/2)^2 - \rho_{кр}^2} + \frac{d^4}{128}\arcsin\frac{2\rho_{кр}}{d}\right\}\Bigg|_{-d/2}^{d/2} =$$

$$= \frac{8m_2}{\pi d^2}\left[0 + \frac{d^4}{128}\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{d^4}{128}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{m_2 d^2}{16}.$$

Далее по формуле находим

$$J_{2z} = J_{2z''} + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_2 d^2}{16} + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{l^2}{4}\right).$$

Момент инерции J_zбарабана относительно оси Cz:

$$J_z = J_{1z} + 2J_{2z} = m_1\left(\frac{d^2}{8} + \frac{l^2}{12}\right) + 2m_2\left(\frac{d^2}{16} + \frac{l^2}{4}\right) =$$

$$= 0{,}75m\left(\frac{d^2}{8} + \frac{l^2}{12}\right) + 2\cdot 0{,}125m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{l^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{m}{64}\left(7d^2 + 8l^2\right) = \frac{80}{64}\left(7\cdot 0{,}6^2 + 8\cdot 1{,}2^2\right) = 17{,}55\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Угловые скорости барабана вокруг координатных осей (см. решение задачи 14.14):

$$\omega_y = \omega' = i\Omega = 2\cdot 20 = 40\ \text{с}^{-1},\quad \omega_z = \Omega\ 20\ \text{с}^{-1}.$$

Кинетическая энергия барабана по формуле:

$T = 0{,}5(J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) = 0{,}5(6{,}3\cdot 40^2 + 17{,}55\cdot 20^2) = 8550$ Дж.

Ответ: $T = 8550$ Дж $= 8{,}55$ кДж.

15.3. Найти ускорение одноковшового погрузчика (рис. 15.3,а) в режиме транспортирования, если известны: полная масса погрузчика m=24 т; общая масса колес $m_к$=2 т; радиус колеса R=0,77 м; радиус инерции колеса относительно его центральной оси С i_c=0,57 м; угол α=5°; коэффициент трения качения k=0,06 м; крутящий момент на ведущей оси М=40 кН·м.

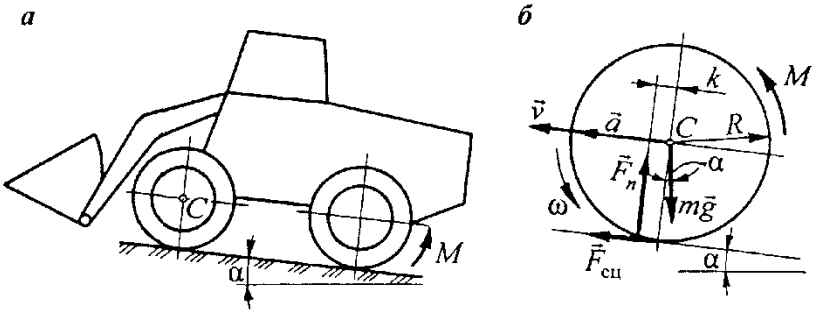


Рис. 15.3

Решение. Так как в задаче требуется определить ускорение тела (погрузчика), то в соответствии с рекомендациями, изложенными в начале данной главы, для решения используем уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Кинетическая энергия Тданной системы складывается из кинетической энергии $T_П$поступательно движущегося корпуса погрузчика с ковшом и кинетической энергии T_Kколес, совершающих плоскопараллельное движение. Введем следующие обозначения: m_n - масса корпуса без колес; v-скорость машины; $\omega_к$ - угловая скорость колес; J_K- момент инерции колеса относительно его центральной оси С. Тогда

$$T = 0{,}5(m_n v^2 + m_к v^2 + J_к\omega_к^2).$$

Учитывая, что $m_n+m_к=m$, $\omega_к=v/R$, $J_K=m_к i_C^2$, получаем

$$T = 0{,}5v^2[m + m_к(i_C/R)^2].$$

Все точки корпуса движутся с одной и той же скоростью, радиусы и коэффициенты трения качения всех колес также соответственно одинаковы, поэтому, не изменяя баланса мощности, можем принять, что все нагрузки приходятся на одно ведущее колесо (рис. 15.3, б). Из рисунка видно, что нормальная реакция опоры $F_n=mg\cos\alpha$, а мощность силы сцепления $F_{сц}$равна нулю, так как эта сила приложена в точке контакта колеса с почвой, т.е. в мгновенном центре скоростей. Общая мощность приложенных сил

$$\begin{aligned}\Sigma P &= M\omega_к + mgv\cos(90^\circ + \alpha) - F_n k\omega_к = \\ &= [M/R - mg\sin\alpha - (mgk/R)\cos\alpha]v = \\ &= \{M/R - mg[\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]\}v.\end{aligned}$$

Подставляяполученные для Ти $\Sigma\bar{P}$выражения в уравнение, получаем

$$[m + m_к (i_C/R)^2]\, v\, dv/dt = \{ M/R - mg\, [\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]\} v,$$

откуда

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{M/R - mg[(k/R)\cos\alpha + \sin\alpha]}{m + m_к (i_C/R)^2},$$

или

$$a = \frac{40/0{,}77 - 24 \cdot 9{,}81[(0{,}06/0{,}77)\cos 5° + \sin 5°]}{24 + 2(0{,}57/0{,}77)^2} = 0{,}524 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \frac{M/R - mg[(k/R)\cos\alpha + \sin\alpha]}{m + m_к (i_C/R)^2} = 0{,}524 \text{ м/с}^2.$

Практическая работа №16
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

Кинетической энергией материальной точки называют скалярную меру механического движения, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

В различных случаях движения тела его кинетическую энергию вычисляют по следующим формулам.

1. При поступательном движении

$$T = 0{,}5mv^2,$$

где m- общая масса тела; v- его скорость.

2. При вращательном движении

$$T = 0{,}5J_z\omega^2,$$

где J_z- момент инерции тела относительно оси z его вращения; ω- угловая скорость тела.

3. При плоскопараллельном движении

$$T = 0{,}5J_P\omega^2 = 0{,}5(mv_C{}^2 + J_C\omega^2),$$

где J_P- момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной направляющей плоскости (т.е. плоскости, в которой движется центр масс C) и проходящей через мгновенный центр скоростей P; v_C-скорость центра масс C; J_C - момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной направляющей плоскости.

4. При сферическом движении

$$T = 0{,}5(J_x\omega_x{}^2 + J_y\omega_y{}^2 + J_z\omega_z{}^2) - (J_{xy}\omega_x\omega_y + J_{yz}\omega_y\omega_z + J_{zx}\omega_z\omega_x).$$

Осевые и центробежные моменты инерции вычисляют относительно осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.

5. В общем случае движения свободного тела (формула Кёнига)

$$T = 0{,}5mv_C{}^2 + T',$$

где T'-кинетическая энергия в сферическом движении вокруг центра масс.

Формула справедлива для любой (в том числе изменяемой) механической системы, при этом T'-кинетическая энергия системы в ее движении относительно осей, перемещающихся поступательно вместе с центром масс.

Первая производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему (дифференциальная форма теоремы):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{k} P_j^e + \sum_{q=1}^{\upsilon} P_q^i,$$

где j=1, ..., k-порядковый номер внешней силы;

P^e_j- ее мощность;

k-число действующих на систему внешних сил;

q=1, ...,υ-порядковый номер внутренней силы;

P^i_q- ее мощность;

υ-число действующих на систему внутренних сил.

Уравнение следует применять в тех случаях, когда задано или требуется найти ускорение тела - линейное (при поступательном движении тела) или угловое (при вращательном движении).

Полная механическая энергия консервативной системы остается величиной постоянной:

$$E = T + \Pi = \text{const}.$$

16.1. В задаче определить скорость бойка перфоратора в конце пути l=115 мм, применяя теорему об изменении кинетической энергии.

Решение. Начальная скорость бойка v_o=0, поэтому его кинетическая энергия в начальном положении T_o=0, а в конечном положении T=0,5mv^2.

Боек перемещается горизонтально, работа силы тяжести равна нулю.

Работа силы, вызванной разностью Δpдавления воздуха в задней и передней полостях,

$$A = \Delta p(\pi d^2/4)(s_1 + 0{,}5s_2),$$

где s_1=60 мм - перемещение бойка под действием постоянной и максимальной по величине силы; s_i=55 мм - перемещение бойка под действием силы, изменяющейся линейно от максимума до нуля.

Подставляя значения Tи Aв уравнение, получаем

$$0{,}5mv^2 = \Delta p(\pi d^2/4)(s_1 + 0{,}5s_2),$$

откуда с учетом исходных данных

$$v = \sqrt{\frac{\Delta p\,\pi d^2}{2m}(s_1 + 0{,}5s_2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cdot 10^5\,\pi(35\cdot 10^{-3})^2}{2\cdot 0{,}75}(60 + 0{,}5\cdot 55)10^{-3}} = 9{,}476 \text{ м/с}.$$

Ответ: v = 9,476 м/с.

16.2. На рис. 16.2 изображена схема прибора для определения вязкости закладочной смеси. Груз l подвешен на нити, перекинутой через блок 2 и

намотанной на барабан 3, жестко связанный с ротором 4. Ротор помещен в цилиндрический сосуд 5, заполненный закладочной смесью. При опускании груза под действием силы тяжести ротор вращается вокруг вертикальной оси, испытывая силы сопротивления, момент которых относительно этой оси $M=\mu\omega^2$, где μ- коэффициент, характеризующий вязкость смеси; ω- угловая скорость ротора. Прибором замеряют скорость установившегося равномерного движения груза и по ней определяют коэффициент μ. Известны: масса m_1груза; масса m_2блока; момент инерции Jротора с барабаном относительно оси вращения; радиус Rбарабана. Блок - сплошной однородный диск. В начальный момент времени система неподвижна. Определить зависимость скорости груза от времени tи найти скорость и установившегося движения груза.

Решение. Так как момент Mсил сопротивления относительно оси вращения ротора зависит от угловой скорости, то в соответствии с рекомендациями, изложенными в начале данной главы, для решения задачи применяем дифференциальную форму теоремы об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

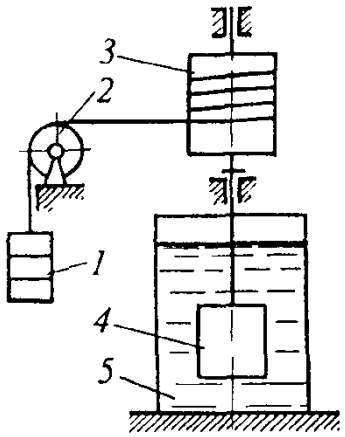


Рис. 16.2

где T_1- кинетическая энергия груза, $T_1=0{,}5m_1v^2$; T_2- кинетическая энергия блока 2, $T_2=0{,}5J_2\omega_2$; J_2-момент инерции блока, $J_2=0{,}5m_2r^2_2$; r_2-радиус блока; ω_2- угловая скорость блока, $\omega_2=v/r_2$, T_3-кинетическая энергия ротора с барабаном, $T_з=0{,}5J\omega^2$; ω-угловая скорость ротора, $\omega = v/R$.

Произведя соответствующие подстановки, имеем

$$T = 0{,}5(m_1 + 0{,}5m_2 + J/R^2)v^2 = 0{,}5m_{\text{пр}}v^2,$$

где $m_{пр}$- приведенная к грузу общая масса подвижной механической системы, $m_{пр}=m_1+0{,}5m_2+J/R^2$.

Сумма мощностей действующих на систему сил (силы $m_1\vec{g}$ тяжести груза lи момента Mсил сопротивлений)

$$\Sigma P = m_1gv - M\omega = m_1gv - \mu\omega^2\omega = m_1gv - \mu v^3/R^3.$$

Подставляя значения Tи ΣPиз выражений в уравнение, получаем

$$0{,}5m_{\text{пр}}v\ dv/dt = m_1gv - \mu v^3/R^3.$$

Сократив на v, разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_0^v \frac{dv}{m_1 gR^3 - \mu v^2} = \frac{1}{m_{\text{пр}} R^3} \int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{m_1 gR^3 \mu}} \left(\ln \frac{\sqrt{m_1 gR^3} + v\sqrt{\mu}}{\sqrt{m_1 gR^3} - v\sqrt{\mu}} - \ln 1 \right) = \frac{t}{m_{\text{пр}} R^3},$$

или

$$\ln \frac{\sqrt{m_1 gR^3} + v\sqrt{\mu}}{\sqrt{m_1 gR^3} - v\sqrt{\mu}} = kt, \quad \text{где} \quad k = \frac{2\sqrt{m_1 g\mu}}{m_{\text{пр}} R^{1,5}}.$$

Отсюда

$$v = R\sqrt{\frac{m_1 gR}{\mu}} \frac{e^{kt} - 1}{e^{kt} + 1}.$$

Если постоянную величину $R\sqrt{\frac{m_1 gR}{\mu}}$ обозначить через u, то получим

$$v = u(e^{kt} - 1)/(e^{kt} + 1).$$

При $t \to \infty$ $(e^{kt} - 1)/(e^{kt} + 1) \to 1$, а $v \to u = \text{const}$, следовательно, u – скорость установившегося движения груза.

Ответ: $v = u(e^{kt} - 1)/(e^{kt} + 1)$, где u – скорость установившегося движения груза, $u = R\sqrt{m_1 gR/\mu}$;
$k = 2\sqrt{m_1 g\mu}/(m_{\text{пр}} R^{1,5})$; $m_{\text{пр}}$ – общая масса системы, приведенная к грузу, $m_{\text{пр}} = m_1 + 0{,}5m_2 + J/R^2$.

16.3. Решить задачу, учитывая общую массу m_1роликов и считая их сплошными однородными цилиндрами одинакового радиуса.

Решение. В соответствии с указаниями к уравнению, изложенными в начале данной работы, используем для решения дифференциальную форму теоремы об изменении кинетической энергии.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_б + 2T_р,$$

где $T_б$- кинетическая энергия барабана, $T_б$=0,5$J\omega_2$; $T_р$- кинетическая энергия ролика, $T_р$ = 0,5$J_р\omega_р^2$; $J_р$-его момент инерции, $J_Р$= $m_р$-/2; $m_р$- масса одного ролика, $m_р$=m_1/2; $\omega_р$-угловая скорость ролика, $\omega_р$=$\omega R/r$. Расшифровка остальных упомянутых выше параметров приведена в условии задачи.

После подстановки в уравнение (1) значений входящих в него величин получаем

$$T = 0{,}5\omega^2(J + 0{,}5m_1 R^2).$$

Сумма мощностей внутренних сил равна нулю, поскольку нормальные давления барабана на катки уравновешиваются реакциями последних, а силы трения попарно равны и направлены в противоположные стороны. Силы тяжести роликов и реакции опор барабана и катков приложены в неподвижных точках, поэтому мощность этих сил также равна нулю. Следовательно, в правую часть уравнениявойдет только сумма мощностей действующего на приводной ролик вращающего момента Mи приложенной в точке Cсилы mgтяжести барабана:

$$\Sigma P = M\omega_p - (mge\sin\varphi)\omega = (MR/r - mge\sin\varphi)\omega.$$

Подставляя выражения в уравнение, имеемоткуда

$$\omega\varepsilon(J + 0{,}5m_1R^2) = (MR/r - mge\sin\varphi)\omega,$$

$$\varepsilon = (MR/r - mge\sin\varphi)/(J + 0{,}5m_1R^2).$$

Чтобы найти угловую скорость, выразим предварительно угловое ускорение через производную угловой скорости по углу φ:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Разделяем переменные, подставляем из формулы значение ε и интегрируем, учитывая, что при φ=0 угловая скорость ω_o=0:

$$\frac{1}{J + 0{,}5m_1R^2}\int_0^{\varphi}(MR/r - mge\sin\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\omega}\omega\,d\omega,$$

$$\frac{MR\varphi/r - mge(1-\cos\varphi)}{J + 0{,}5m_1R^2} = \frac{\omega^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{2[MR\varphi/r - mge(1-\cos\varphi)]/(J + 0{,}5m_1R^2)}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{2[MR\varphi/r - mge(1-\cos\varphi)]/(J + 0{,}5m_1R^2)}$;

$$\varepsilon = (MR/r - mge\sin\varphi)/(J + 0{,}5m_1R^2).$$

Практическая работа №17
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O*- это векторная величина $\vec{M}_0(m\vec{v})$, определяемая равенством

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра *O*.

Главным моментом количеств движения (или кинетическим моментом) системы относительно данного центра *O* называют геометрическую сумму моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_O = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_O(m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j),$$

где *j*= 1,..., *n*- номер точки; *n*- число точек.

Проекции вектора $\vec{K}_0$на координатные оси *Oxyz*-этокинетические моменты системы относительно данных осей:

$$K_x = K_{Ox}, \quad K_y = K_{Oy}, \quad K_z = K_{Oz}.$$

Каждый из этих моментов равен алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно соответствующей оси:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum_{j=1}^{n} M_x(m_j\vec{v}_j), \\ K_y &= \sum_{j=1}^{n} M_y(m_j\vec{v}_j), \\ K_z &= \sum_{j=1}^{n} M_z(m_j\vec{v}_j). \end{aligned}\right\}$$

Кинетический момент системы относительно ее центра масс *C*

$$\vec{K}_C = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_C(m_j\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}'_j \times m_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}'_j \times m_j\vec{v}'_j,$$

где $\vec{r}'_j$-радиус-вектор *j*-й точки системы, проведенный из центра масс *C*; $\vec{v}_j$- абсолютная скорость точки; v'_j- скорость точки относительно осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

Связь между кинетическими моментами $\vec{K}_0$ и $\vec{K}_c$:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times \vec{Q} = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C,$$

где $\vec{r}_c$ - радиус-вектор центра масс системы, проведенныйиз выбранного ранее центра *O*; $\vec{Q}$-количество движения системы; $\vec{v}_c$-скорость центра масс. При поступательном движении тела

$$\vec{K}_C = 0, \quad \vec{K}_O = \vec{r}_C \times \vec{Q} = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C.$$

При сферическом движении тела вокруг неподвижного центра *O*проекции кинетического момента K_0определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{zx}\omega_z, \\ K_y &= -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z, \end{aligned}\right\}$$

где J_x, J_y, J_z- осевые моменты инерции; J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} - центробежные моменты инерции; ω_x, ω_y, ω_z- проекции вектора угловой скорости на декартовы координатные оси.

17.1. С какой угловой скоростью будет вращаться приводной барабан ленточного конвейера (рис 17.1, а) через 3 сек после начала· движения, если масса барабана m=0,7 т; диаметр барабана D=0,5 м; радиус инерции барабана относительно оси его вращения i=0,23 м; крутящий момент M=0,75кН·м; момент сил сопротивления M_c=25 Н•м; силы натяжения ленты: S_1=5 кН иS_2=2,7 кН.

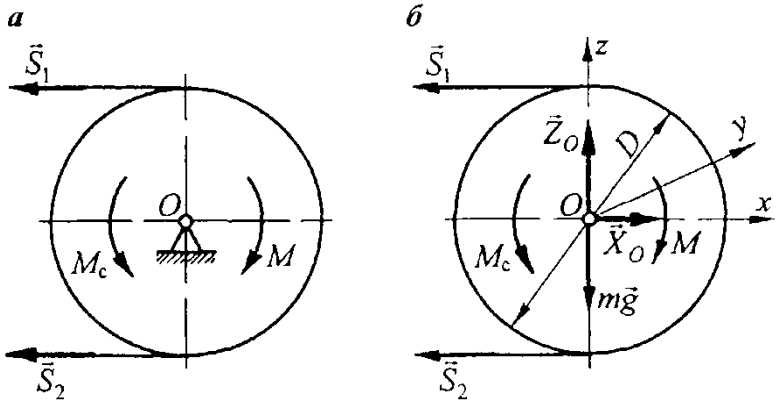


Рис. 17.1

Решение. Приводной барабан представляет собой тело, вращающееся вокруг неподвижной оси *Oy*, поэтому дифференциальное уравнение его движения определяем по формуле, которая в данном случае имеет вид

$$J_y\,\varepsilon = \sum M_y(\vec{F}_k^e).$$

На барабан действуют следующие внешние силы и моменты (рис.17.1,б): сила тяжести $\vec{mg}$, крутящий момент M, моментсил сопротивления M_e, силы натяжения ленты $\vec{S}_1$и $\vec{S}_2$и реакция $\vec{R}_0$подшипника, представленная на рис. 17.1, б в видесоставляющих $\vec{X}_0$и $\vec{Z}_0$.

Момент инерции барабана относительно оси вращения *Oy*

$$J_y = mi^2$$

Сумма моментов внешних сил относительно той же оси (положительными, как обычно, считаем моменты сил, стремящиеся повернуть тело против хода часовой стрелки, если рассматривать систему с положительного конца оси)

$$\sum M_y(\vec{F}_k^e) = M - M_c - S_1\frac{D}{2} + S_2\frac{D}{2} = M - M_c - 0{,}5(S_1 - S_2)\,D.$$

Теперь из уравнения (1) с учетом (2) и (3) находим угловое ускорение барабана:

$$\varepsilon = \frac{\sum M_y(\vec{F}_k^e)}{mi^2} = \frac{M - M_c - 0{,}5\,(S_1 - S_2)\,D}{mi^2} = \text{const}.$$

Угловое ускорение барабана постоянно, следовательно, барабан вращается равноускоренно и его угловая скорость

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Поскольку движение барабана начинается из состояния покоя, то начальная угловая скорость ω_o=0.

Тогда

$$\omega = \varepsilon t = \frac{M - M_c - 0{,}5\,(S_1 - S_2)\,D}{m i^2}\,t =$$

$$= \frac{0{,}75 - 0{,}025 - 0{,}5(5 - 2{,}7)0{,}5}{0{,}7 \cdot 0{,}23^2}\,3 = 12{,}15\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{M - M_c - 0{,}5\,(S_1 - S_2)\,D}{m i^2}\,t = 12{,}15\ \text{с}^{-1}.$

17.2. Рабочий орган комбайна поворачивается вокруг горизонтальной оси *О*под действием постоянного усилия *F*, развиваемого гидроцилиндром *AM*(рис. 17.2, а). Масса рабочего органа *т*момент инерции относительно оси вращения J_0; точка *С*-центр масс рабочего органа. Размеры *a, b, l* и угол α известны. Определить угловое ускорение и угловую скорость рабочего органа в зависимости от угла φ его наклона к горизонту, если при φ=0 угловая скорость ω_0=0.

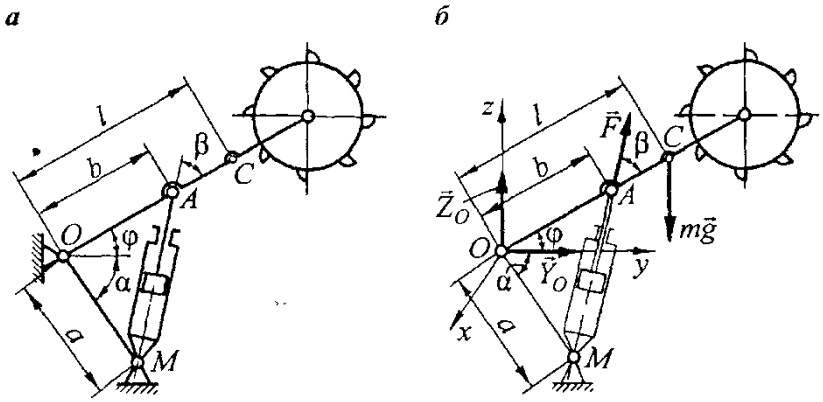


Рис. 17.2

Решение. Рабочий орган комбайна вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси*Ox*. Дифференциальное уравнение его движения определяем по формуле, которая в данном случае имеет вид

$$J_O\,\varepsilon = \sum M_x(\vec{F}_k^e).$$

На рабочий орган действуют следующие внешние силы (рис. 17.2,б): сила тяжести *mg*, приложенная в точке *С*; усилие *F*, развиваемое гидроцилиндром; реакция R_0подшипника, представленная на рис. 17.2,б в виде составляющих Y_0и Z_0.

Сумма моментов внешних сил относительно оси *Ox*вращения рабочего органа

$$\sum M_x(\vec{F}_k^e) = Fb\sin\beta - mgl\cos\varphi,$$

где β- угол между рабочим органом *OC*и продольной осью *AM*гидроцилиндра.

Преобразуем уравнение (1) с учетом выражения (2):

$$J_O\,\varepsilon = Fb\sin\beta - mgl\cos\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{1}{J_O}(Fb\sin\beta - mgl\cos\varphi).$$

Из треугольника *OAM*по теореме синусов находим *sin β*:

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{l_{AM}}{\sin(\alpha+\varphi)}, \quad \text{или} \quad \sin\beta = \frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{l_{AM}},$$

где $l_{AM} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}$ (по теореме косинусов).

Подставляя полученное значение *sin β* в формулу (3), имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{J_O}\left[\frac{Fab\sin(\alpha+\varphi)}{l_{AM}} - mgl\cos\varphi\right].$$

Для определения зависимости угловой скорости ω рабочего органа от угла φ представим уравнение (4) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J_O}\left[\frac{Fab\sin(\alpha+\varphi)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}} - mgl\cos\varphi\right].$$

Умножаем числитель, и знаменатель левой части уравнения на$d\varphi$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение и разделяя переменные, получаем

$$\omega\, d\omega = \frac{1}{J_O}\left[\frac{Fab\sin(\alpha+\varphi)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}} - mgl\cos\varphi\right]d\varphi.$$

Интегрируем это дифференциальное уравнение, учитывая, что при φ=0 начальная угловая скорость рабочего органа ω_0=0:

$$\int_0^{\omega}\omega\, d\omega = \frac{1}{J_O}\left[Fab\int_0^{\varphi}\frac{\sin(\alpha+\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}} - mgl\int_0^{\varphi}\cos\varphi\, d\varphi\right],$$

или

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{J_O}\left\{Fab\int_0^{\varphi}\left[\frac{-d[\cos(\alpha+\varphi)]}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}}\right] - mgl\sin\varphi\right\} =$$

$$= \frac{1}{J_O}\left[-Fab\left(-\frac{2}{2ab}\right)\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\varphi)}\Big|_0^{\varphi} - mgl\sin\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{J_O}\left[F\left(l_{AM} - \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\right) - mgl\sin\varphi\right],$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{J_O}\left[F\left(l_{AM} - \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\right) - mgl\sin\varphi\right]}.$$

Ответ: $\varepsilon = \frac{1}{J_O}\left[\frac{Fab\sin(\alpha+\varphi)}{l_{AM}} - mgl\cos\varphi\right]$;

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{J_O}\left[F\left(l_{AM} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\right) - mgl\sin\varphi\right]},$$

где $l_{AM} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \varphi)}$.

17.3. Буровая вышка, шарнирно закрепленная в точке *A*, получив в начальный момент некоторую угловую скорость ω_o, опускается из почти вертикального положения в горизонтальное. Вышка удерживается канатом, скорость и которого по величине остается постоянной (рис. 17.3,а). Вышку следует считать сплошным однородным стержнем массой *m*и длиной *l*; известны размеры $l_{AB}=l_{AD}=c$.Определить натяжение *T*каната в функции угла φ поворота вышки. Найти верхний предел скорости *u*, при котором не произойдет ослабления каната в процессе опускания вышки. Радиусом ролика *E*пренебречь.

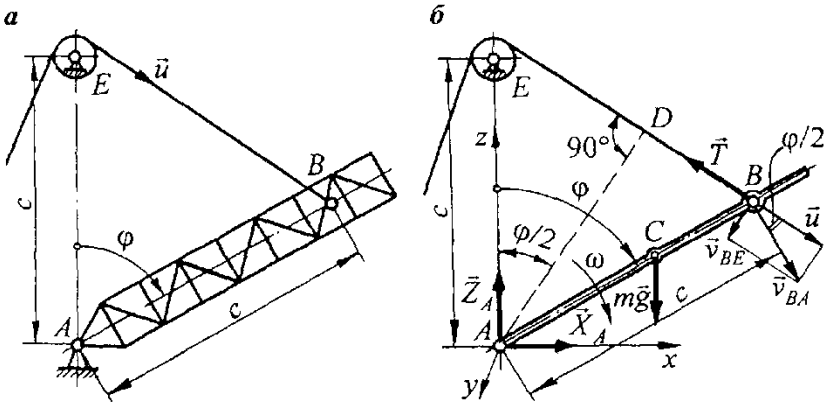


Рис. 17.3

Решение. Буровая вышка совершает вращательное движение в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси *A*. Вышку допускается считать сплошным однородным стержнем, поэтому ее момент инерции относительно оси вращения $J_y=ml^2/3=const$, а сила тяжести *mg*приложена в точке *C*, находящейся на продольной оси вышки на расстоянии 0,5*l* от точки *A*(рис. 17.3, б). На вышку также действуют усилие $\vec{T}$ натяжения каната и реакция $\vec{R}_A$ опоры, представленная нарис. 17.3,б в виде составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Z}_A$ (определение этойреакции в задаче не требуется). Треугольник *BAE*-равнобедренный, *AD*-его высота и биссектриса угла *BAE*, следовательно, $BAD=\varphi/2$.

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела в данном случае приобретает вид

$$J_y\,\varepsilon = \sum M_y(\vec{F}_k^e) = mg\frac{l}{2}\sin\varphi - Tc\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Для определения зависимости углового ускорения ε от скорости каната и угла φ рассмотрим движение точки *B*.

Считая сначала эту точку принадлежащей вышке, получаем

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA},$$

где $\vec{v}_{BA} \perp AB$; $v_{BA} = c\omega$; ω- угловая скорость вышки.

Относя далее точку *B*к канату *BE*, представляем ее движение как сложное, состоящее из переносного со скоростью и каната в точке его схода с ролика *E*и

относительного со скоростью $\vec{v}_{BE}$, причем $\vec{v}_{BE}$ BE. Тогда

$$\vec{v}_B = \vec{u} + \vec{v}_{BE}.$$

Приравниваем правые части уравнений (2) и (3):

$$\vec{v}_{BA} = \vec{u} + \vec{v}_{BE}.$$

По полученному уравнению (4) строим прямоугольник скоростей (см.рис. 17.3, б), из которого $v_{BA}=u/(\cos \varphi/2)$.

Угловая скорость вышки $\omega=v_{BA}/c=u/(c\cos\varphi/2)$.

Угловое ускорение вышки

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{u}{c\cos(\varphi/2)}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{u}{c\cos(\varphi/2)}\right] =$$

$$= \frac{u^2 \sin(\varphi/2)}{2c^2\cos^3(\varphi/2)}.$$

Подставляем в уравнение (1) значения J_y и ε:

$$\frac{ml^2}{3}\frac{u^2\sin(\varphi/2)}{2c^2\cos^3(\varphi/2)} = mg\frac{l}{2}\sin\varphi - Tc\cos\frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$T = \frac{ml}{2c\cos(\varphi/2)}\left[g\sin\varphi - \frac{lu^2\sin(\varphi/2)}{3c^2\cos^3(\varphi/2)}\right] =$$

$$= \frac{ml}{c}\left[g - \frac{lu^2}{6c^2\cos^4(\varphi/2)}\right]\sin(\varphi/2).$$

Максимальную скорость $u_{шах}$, при которой не произойдет ослабления каната, определяем из условия $T\geq 0$, т.е.

$$T = \frac{ml}{c}\left[g - \frac{lu_{\max}^2}{6c^2\cos^4(\varphi/2)}\right]\sin(\varphi/2) \geq 0.$$

По условию задачи $0<\varphi<\pi/2$, следовательно, $ml/c\cdot\sin(\varphi/2)>0$ и для соблюдения неравенства (6) необходимо иметь

$$g - \frac{lu_{\max}^2}{6c^2\cos^4(\varphi/2)} \geq 0,$$

откуда

$$u_{\max} \leq 2c\sqrt{\frac{1{,}5g}{l}}\cos^2(\varphi/2).$$

Поскольку $u_{шах}$ не должна превышать наименьшую величину правой части неравенства, достигаемую при $\varphi=\varphi_{мах}$, т.е. при $\varphi=\pi/2$, когда $\cos(\varphi/2)=\cos(\pi/4)=l/v_2$, то

$$u_{\max} = c\sqrt{\frac{1{,}5g}{l}}.$$

Скорость каната по условию задачи поддерживается постоянной в течение всего периода движения вышки, в том числе и в начальный момент движения. При этом $\vec{u} \perp AB$, следовательно, максимально допустимая начальная угловая скорость вышки

$$\omega_{0\max} = \frac{u_{\max}}{c} = \sqrt{\frac{1{,}5\,g}{l}}.$$

Ответ: $T = \frac{ml}{c}\left[g - \frac{l u^2}{6c^2 \cos^4(\varphi/2)}\right]\sin(\varphi/2);$

$$u_{\max} = c\sqrt{\frac{1{,}5\,g}{l}}.$$

Практическая работа №18
ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ.

Теорема о движении центра масс системы:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{i} \vec{F}_k^e = \vec{R}^e,$$

где $\vec{a}_c$-ускорение центра масс системы. Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все действующие на систему внешние силы.

Дифференциальные уравнения движения центра масс системы в декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^{i} F_{kx}^e = R_x^e, \\ m\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^{i} F_{ky}^e = R_y^e, \\ m\ddot{z}_C &= \sum_{k=1}^{i} F_{kz}^e = R_z^e. \end{aligned}\right\}$$

18.1. Определить горизонтальную и вертикальную реакции фундамента двухкривошипного пресса для брикетирования угля (рис. 18.1), если кривошипы *OA*и *OA'* смещены на 180° относительно друг друга и вращаются вместе с маховиком с постоянной угловой скоростью ω. Шатуны *AB* и *A'B'*считать однородными стержнями массой m_1каждый; массы поршней *B* и *B'*также одинаковы: $m_в=m_в=m_2$, общая масса пресса m; размеры: l_{OA}-$l_{OA'}$=r, $l_{AB}=l_{A'B}=l$ причем r/l«1.

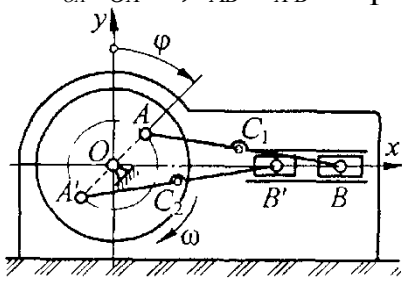


Рис. 18.1

Указание при определении законов движения центров масс шатунов и поршней использовать приближающую формулу для вычисления квадратного корня:

$$\sqrt{1-x} \approx 1-0{,}5x, \quad \text{если} \quad x<<1.$$

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, для определения реакций фундамента применяем дифференциальную форму теоремы об изменении количества движения в проекциях на декартовы координатные оси, принимая за начало координат центр *O*вращения маховика и направляя горизонтальную ось *Ox*вправо от центра. В отличие от механической системы, заданной в примере, рассматриваемый механизм содержит не два, а четыре звена (два ползуна и два кривошипа), количество движения которых учитывается при определении количества движения системы.

Находим скорости центров масс подвижных звеньев.

Центр *O*масс маховика с кривошипами *OA*и *OA'*неподвижен.

Поршни B и B'совершают возвратно-поступательное движение, при этом их центры масс (точки Bи B') перемещаются по оси Ox.

Координаты точки B(см. решение задачи):

$$x_B = r\sin\omega t + l - 0{,}5(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_B = 0.$$

По аналогии определяем координаты точки B':

$$x_{B'} = -r\sin\omega t + l - 0{,}5(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_{B'} = 0.$$

Скорости поршней:

$$v_B = \dot{x}_B = r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$

$$v_{B'} = \dot{x}_{B'} = -r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t).$$

Координаты центра масс C_1шатуна ABнаходим по формулам, полученным в решении задачи:

$$x_{C_1} = r\sin\omega t + 0{,}5l - 0{,}25(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_{C_1} = 0{,}5r\cos\omega t.$$

Координаты центра масс C_2шатуна $A'B'$(по аналогии):

$$x_{C_2} = -r\sin\omega t + 0{,}5l - 0{,}25(r^2/l)\cos^2\omega t, \quad y_{C_2} = -0{,}5r\cos\omega t.$$

Проекции скоростей центров масс C_1и C_2.

$$\dot{x}_{C_1} = r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t), \quad \dot{y}_{C_1} = -0{,}5r\omega\sin\omega t,$$

$$\dot{x}_{C_2} = -r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t), \quad \dot{y}_{C_2} = 0{,}5r\omega\sin\omega t.$$

Внешние силы, действующие на пресс: $m\vec{g}$-сила тяжести пресса, включающая в себя силы тяжести корпуса пресса, маховика с кривошипами, шатунов и поршней; $\vec{X}$-горизонтальная и $\vec{Y}$- вертикальная составляющие реакции фундамента.

Проекции количества движения рассматриваемой системы на координатные оси:

$$Q_x = \sum_{j=1}^{4} m_j v_{jx} = m_1\dot{x}_{C_1} + m_1\dot{x}_{C_2} + m_2 v_B + m_2 v_{B'} =$$

$$= m_1[r\omega\cos\omega t + 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t) - r\omega\cos\omega t +$$

$$+ 0{,}25(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] + m_2[r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t) -$$

$$- r\omega\cos\omega t + 0{,}5(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] = (0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t),$$

$$Q_y = \sum_{j=1}^{4} m_j v_{jy} = m_1\dot{y}_{C_1} + m_1\dot{y}_{C_2} + 0 + 0 =$$

$$= -0{,}5m_1 r\omega\sin\omega t + 0{,}5m_1 r\omega\sin\omega t = 0.$$

Подставляем значения проекций количества движения и проекций внешних сил в уравнения:

$$\frac{d}{dt}[(0{,}5m_1 + m_2)(r^2\omega/l)\sin(2\omega t)] = X,$$

$$0 = Y - mg,$$

откуда

$$X = (r^2\omega^2/l)(m_1 + 2m_2)\cos(2\omega t), \quad Y = mg.$$

Ответ: $X = (r^2\omega^2/l)(m_1 + 2m_2)\cos(2\omega t)$; $Y = mg$.

18.2. На одном из этапов работы погрузочной машины рукоять 2, несущая ковш 3 с грузом, перекатывается без проскальзывания по горизонтальной плоскости корпуса *1* и в конце пути ударяется об упоры 4, после чего груз из ковша пересыпается в вагонетку 5 (рис. 18.2). Известны: угловая скорость ω рукояти в

момент удара; скорость v корпуса с вагонеткой в этот же момент, а также общая масса mвсей машины с грузом; масса m_1рукояти и ковша с грузом; расстояние h от их общего центра масс до плоскости корпуса. Определить скорость и машины по окончании пересыпания груза; вредными сопротивлениями движению машины пренебречь.

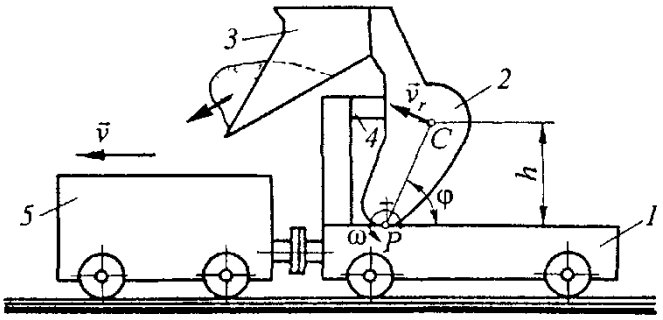


Рис. 18.2

Решение. В процессе разгрузки на рассматриваемую механическую систему действуют только вертикальные силы (силы тяжести и нормальные реакции опоры), т.е. сумма проекций всех действующих внешних сил на горизонтальную ось x равна нулю.

Тогда в соответствии с законом сохранения количества движения системы проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Скорость $\vec{v}_c$ общего центра C масс рукояти с ковшом и грузом до удара рукояти об упоры складывается из переносной скорости $\vec{v}$ корпуса и окружной относительной скорости $\vec{v}_r$ при перекатывании рукояти по плоскости корпуса, т.е. в процессе поворота рукояти вокруг *МЦС* (точки Pее контакта с корпусом):

$$\vec{v}_C = \vec{v} + \vec{v}_r.$$

Проекция скорости $\vec{v}_c$ на ось x

$$v_{Cx} = v + v_{rx} = v + v_r \sin\varphi = v + \omega R \sin\varphi = v + \omega h.$$

Проекция количества движения системы до удара рукояти об упоры на эту же ось

$$Q_{x0} = (m - m_1)\, v + m_1 v_{Cx} = (m - m_1)\, v + m_1 (v + \omega h) = mv + m_1 \omega h.$$

После удара (по окончании пересыпания груза) вся система движется с горизонтальной скоростью и, поэтому проекция количества движения $Q_x = mu.$

Но, как указывалось выше, $Q_{x0} = Q_x = \text{const},$ поэтому

$$mv + m_1 \omega h = mu,$$

откуда $u = v + (m_1/m)h\omega.$

Ответ: $u = v + (m_1/m)h\omega.$

Практическая работа №19

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ.

*Количеством движения материальной точки*называют векторную величину mv, равную произведению массы точки на вектор ее скорости.

*Количеством движения системы*называют геометрическую сумму количеств движения ее точек:

$$\vec{Q} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j$$

где m_j- масса j-й точки; $\vec{v}_j$-ее скорость; n- число точек в системе; j=1,...,n-номер точки.

Количество движения системы определяют также и по формуле

$$\vec{Q} = m\vec{v}_c$$

где $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$ -масса системы; $\vec{v}_c$-скорость ее центра масс.

19.1. На заключительной стадии движения погрузочной машины (рис. 19.1) ее колеса пробуксовывают по рельсам, а ковш внедряется в породу, испытывая при этом силу сопротивления $R=fmg+ks$, где f- коэффициент трения колес по рельсам (все колеса - ведущие); m-масса машины; g- ускорение силы тяжести; k-коэффициент пропорциональности; s-перемещение машины, отсчитываемое от того ее положения, в котором началась пробуксовка колес. Найти время t_1 и перемещение s_1от начала пробуксовки до остановки машины, если начальная ее скорость равна v_0.

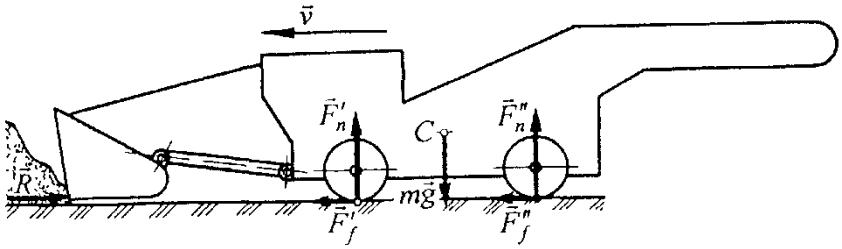


Рис. 19.1

Решение. Внешние силы, действующие на погрузочную машину в процессе внедрения ковша в породу: сила тяжести mg, приложенная в центре масс C; испытываемая ковшом сила сопротивления $\vec{R}$; нормальные реакции опоры $\vec{F}'_n$ и $\vec{F}''_n$, а также силы трения $\vec{F}'_f$ и $\vec{F}''_f$, действующие соответственно на переднюю и заднюю колесные пары. Изменением положения центра масс системы относительно корпуса машины при заполнении ковша грунтом пренебрегаем и считаем, что центр масс перемещается горизонтально вместе с корпусом.

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс системы.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на координатные оси:

$$m\ddot{x} = -R + \vec{F}'_f + \vec{F}''_f,$$

$$m\ddot{y} = mg - \vec{F}'_n - \vec{F}''_n.$$

Поскольку перемещение центра масс по вертикали отсутствует, то $\ddot{y}=0$,

следовательно, $F_n'+F_n''=mg$. Кроме того, по закону Кулона $F_f'=fF_n'$ и $F_f''=fF_n''$, т.е. $F_f'+F_f''=f(F_n'+F_n'')=fmg$.

Так как начало координат совпадает с расположением центра масс системы в начальный момент заключительной стадии движения машины, то $x=s$и первое уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{s}=-mgf-ks+fmg, \quad \text{или} \quad \ddot{s}+(k/m)s=0.$$

Характеристическое уравнение $u^2+\kappa/m=0$ имеет мнимые корни $u=\pm i\sqrt{k/m}$, поэтому общее решение уравнения (1):

$$s=C_1\cos\left(t\sqrt{k/m}\right)+C_2\sin\left(t\sqrt{k/m}\right),$$

откуда

$$\dot{s}=-C_1\sqrt{k/m}\sin\left(t\sqrt{k/m}\right)+C_2\sqrt{k/m}\cos\left(t\sqrt{k/m}\right).$$

При$t=t_0=0$ имеем$s_0=0$, $s_0=v_0$. Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем

$$0=C_1, \quad v_0=C_2\sqrt{k/m}, \text{ т. е. } C_2=v_0\sqrt{m/k}.$$

Тогда

$$s=v_0\sqrt{m/k}\sin\left(t\sqrt{k/m}\right),$$

$$v=\dot{s}=v_0\cos\left(t\sqrt{k/m}\right).$$

Время t_1 движения машины до полной остановки определяем из условия

$v=v_1=v_0\cos\left(t_1\sqrt{k/m}\right)=0$. Так как $v_0\neq 0$, то $\cos\left(t_1\sqrt{k/m}\right)=0$ и $t_1\sqrt{k/m}=\pi/2$, откуда $t_1=0{,}5\pi\sqrt{m/k}$.

Путь, пройденный машиной на заключительной стадии движения,

$$s=s_1=v_0\sqrt{m/k}\sin\left(t_1\sqrt{k/m}\right)=v_0\sqrt{m/k}\sin(\pi/2)=v_0\sqrt{m/k}.$$

Ответ: $t_1=0{,}5\pi\sqrt{m/k}$; $s_1=v_0\sqrt{m/k}$.

19.2. Определить силу трения F_fмежду заторможенными колесами неподвижного автосамосвала и грунтом при разгрузке кузова (рис. 19.2, а) а также суммарное давление F_nавтомобиля на грунт, если скольжение груза по днищу кузова определяется законом $s=at^2/2$и известны: масса груза m_1=10 т; масса машины без груза m_2= 21 т; угол α = 50°; параметр a=3,7 м/с^2.

Решение. На механическую систему автосамосвал - груз действуют следующие внешние силы (рис. 19.2, б): сила тяжести m_1gгруза; сила тяжести m_2gмашины; нормальные реакции $\vec{F}_n'$ и $\vec{F}_n''$грунта и силы сцепления $\vec{F}_f'$ и $\vec{F}_f''$ колес с грунтом, приложенные соответственно к передней и задней колесным парам.

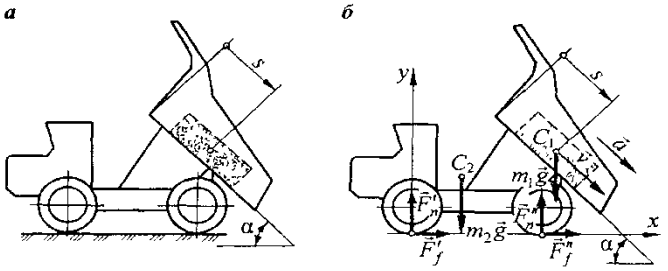


Рис. 19.2

При разгрузке машины движется только груз по плоской поверхности днища кузова, а самосвал остается неподвижным, удерживаемый на месте силами трения, поэтому количество движения системы равно количеству движения груза: $\vec{Q} = \vec{Q}_1 = m_1 \vec{v}$.

Движение груза - поступательное из начального неподвижного положения, а заданный закон перемещения груза соответствует закону равноускоренного движения при $s_o=0$и $v_0=0$. Следовательно, параметр aесть величина ускорения груза.

Применяя теорему об изменении количества движения системы [см. уравнения в начале работы], получаем

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_x) = F_f' + F_f'',$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_y) = -m_1 g - m_2 g + F_n' + F_n'',$$

или

$$m_1 a_x = F_f, \quad m_1 a_y = -(m_1 + m_2)g + F_n,$$

где a_xи a_v-проекции ускорения, $a_x=\alpha cos\alpha$, $a_y=-\alpha sin\alpha$; F_f-суммарная сила трения, $F_f=F_f+F_f''$; F_n - суммарная реакция грунта, равная суммарному давлению автомобиля на грунт, $F_n=F_n'+F_n''$.

Далее определяем требуемые величины F_f и F_n:

$$F_f = m_1 a \cos\alpha = 10\ 3{,}7 \cos 50° = 23{,}783 \text{ кН},$$

$$F_n = R_n = (m_1 + m_2)g - m_1 a \sin\alpha =$$

$$= (10 + 21)\ 9{,}81 - 10\ 3{,}7 \sin 50° = 275{,}766 \text{ кН}.$$

Отметим, что при движении груза по кузову суммарное давление автомобиля на грунт оказывается меньше общей силы тяжести машины и груза на 9,32 %.

Ответ: F_f = 23,783 кН; F_n = 275,766 кН.

19.3. Груз l, подвешенный на канате OMи принимаемый за материальную точку, совершает малые колебания в вертикальной плоскости (рис. 19.3,а). Найти суммарную силу трения F_fмежду колесами неподвижного крана 2 и горизонтальной опорной поверхностью, если масса груза m_1=2 т; длина каната l=5 м; начальный угол отклонения каната от вертикали φ=8°; начальная скорость груза $v_0=0$. Искомую силу трения определить в функции времени.

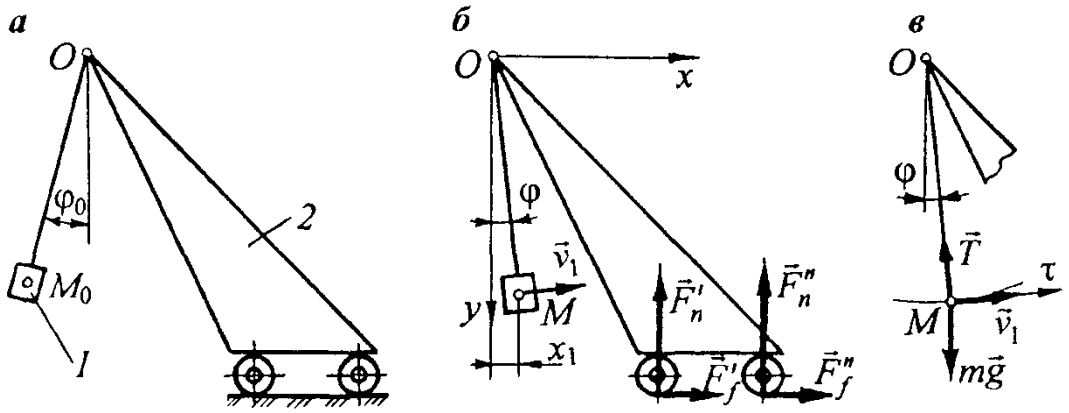


Рис. 19.3

Решение. Если кран неподвижен, а груз качается на невесомом канате (рис.

19.3, б), то количество движения системы равно количеству движения груза, поэтому теорема об изменении количества движения системы в проекции на ось *x* имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_{1x}) = F_f' + F_f'' = F_f,$$

или

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_f,$$

где v_{1x} и $\ddot{x}_1$ - горизонтальные проекции скорости и ускорения груза, принимаемого за материальную точку; F'_f и F_f''-силы трения передней и задней пары колес крана; F_f- суммарная сила трения.

При малых колебаниях груза, когда угол φ отклонения каната от вертикали не превышает значения $\varphi_0 = 8°$, можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда $x = l\sin\varphi \approx l\varphi$, $\ddot{x} \approx l\ddot{\varphi}$ и $F_f \approx m_1 l\ddot{\varphi}$.

Чтобы найти зависимость $\varphi(t)$, рассмотрим отдельно движение груза, на который кроме силы тяжести $m_1 g$ действует сила $\vec{T}$ натяжения каната (рис. 19.3, в). Определение величины T в задаче не ставится, поэтому уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения груза, записываем в проекции на касательную к траектории последнего, отсчитывая угол φ от вертикали в направлении против хода часовой стрелки:

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_1) = -m_1 g \sin\varphi.$$

Но

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{d}{dt}(l\varphi) = l\dot{\varphi}, \text{ а } \sin\varphi \approx \varphi,$$

следовательно,

$$m_1 l\ddot{\varphi} = -m_1 g\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Характеристическое уравнение $u^2 + g/l = 0$ имеет мнимые корни $u = \pm i\sqrt{g/l}$, значит, общее решение уравнения (2) выглядит следующим образом:

$$\varphi = C_1 \cos\left(t\sqrt{g/l}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{g/l}\right),$$

откуда

$$\dot{\varphi} = -C_1\sqrt{g/l}\sin\left(t\sqrt{g/l}\right) + C_2\sqrt{g/l}\cos\left(t\sqrt{g/l}\right).$$

При $t - t_o = 0$ имеем $\varphi(0) = -\varphi_o$, $\varphi(0) = v_0/l = 0$. Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем

$$-\varphi_0 = C_1, \quad 0 = C_2\sqrt{g/l}, \quad \text{т. е. } C_1 = -\varphi_0, \; C_2 = 0.$$

Тогда

$$\varphi = -\varphi_0 \cos\left(t\sqrt{g/l}\right),$$

$$\ddot{\varphi} = \varphi_0 (g/l)\cos\left(t\sqrt{g/l}\right).$$

Теперь искомая функция $F_f = F_f(t)$ принимает вид

$$F_f \approx m_1 l\ddot{\varphi} = m_1\varphi_0 g\cos\left(t\sqrt{g/l}\right) =$$

$$= 2\left(8°\frac{\pi}{180°}\right)9{,}81\cos\left(t\sqrt{9{,}81/5}\right) = 2{,}74\cos(1{,}4t).$$

Ответ: $F_f \approx m_1\varphi_0 g\cos\left(t\sqrt{g/l}\right) = 2{,}74\cos(1{,}4t)$ (кН).

Практическая работа №20
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТОВ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ.

*Количеством движения материальной точки*называют векторную величину тv, равную произведению массы точки на вектор ее скорости.

*Количеством движения системы*называют геометрическую сумму количеств движения ее точек:

$$\vec{Q} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j$$

где m_j- масса j-й точки; $\vec{v}_j$-ее скорость; n- число точек в системе; j=1,...,n -номер точки.

Количество движения системы определяют также и по формуле

$$\vec{Q} = m\vec{v}_c$$

где $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$ -масса системы; $\vec{v}_c$-скорость ее центра масс.

20.1. Поток частиц классифицируемого материала падает на горизонтальный вращающийся диск сепаратора (рис. 20.1, а). После падения частицы скользят по плоскости диска вдоль радиальных ребер. Определить, пренебрегая потерями на трение и массой диска, момент M (Н·м) на валу последнего, необходимый для поддержания его равномерного вращения с угловой скоростью ω ($с^{-1}$), если производительность сепаратора *q(кг/с)*, а радиус диска *R (м)*.

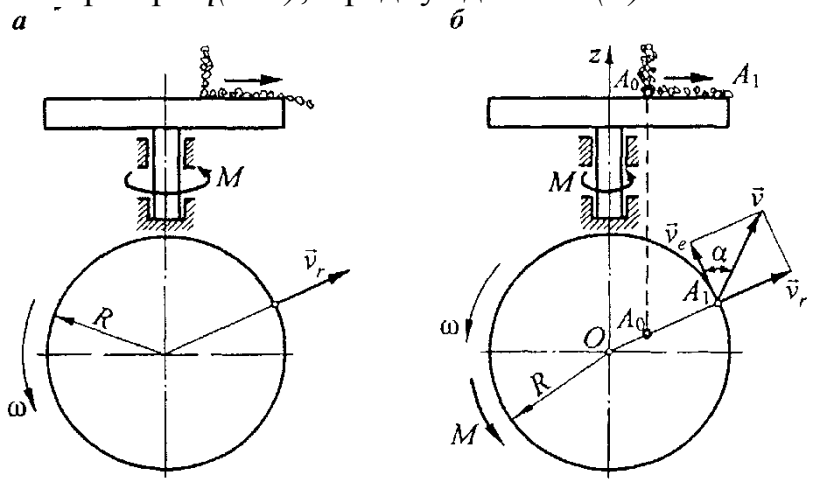


Рис. 20.1

Решение. За элементарный промежуток времени *dt*на диск сепаратора поступает масса материала *dm=qdt*. Поскольку исследуемый в данной задаче процесс сепарации следует считать стабильным, то за этот же промежуток времени *dt*диск покидает точно такая же масса материала.

Рассмотрим движение этой элементарной массы с момента падения ее на диск сепаратора в точке A_oдо момента вылета в точке A_1(рис. 20.1, б).

Горизонтальная составляющая скорости вертикально падающего на диск материала равна нулю, поэтому и кинетический момент dK_{z0}попавшей на диск элементарной массы в момент падения равен нулю, на каком бы расстоянии от оси

вращения диска не происходило это падение.

Дальнейшее движение масса dmсовершает в горизонтальной плоскости с абсолютной скоростью v, складывающейся из скорости v_eпереносного движения вместе с вращающимся диском и скорости v_rотносительного движения вдоль радиальных ребер диска. В точке A_1кинетический момент массы dm

$$dK_{z1} = M_z(dm\,\vec{v}) = \left[\vec{M}_O(dm\,\vec{v})\right]_z = \left|\vec{M}_O(dm\,\vec{v})\right|\cos\gamma,$$

где $\vec{M}_0(dm\,\vec{v})$- вектор-момент количества движения dmvотносительно центра Oдиска, причем $\vec{M}_0(dm\,\vec{v}) = \vec{OA}_1 \cdot dm\,\vec{v}$; $\vec{OA}_1$- радиус-вектор точки A_1, проведенный из центра O; γ- угол между вектором $\vec{M}_0(dm\,\vec{v})$и осью O_z, в данном случае равный нулю, поскольку вектор vперпендикулярен O_zи $\vec{M}_0(dm\,\vec{v})$параллеленO_z. Следовательно,

$$dK_{z1} = \left|\overrightarrow{OA_1} \times dm\,\vec{v}\right|\cos 0° = R\,dm\,v\sin(90° - \alpha) =$$

$$= (R\,dm)(v\cos\alpha) = (R\,q\,dt)\,v_e = (R\,q\,dt)\,R\,\omega = q\,R^2\,\omega\,dt.$$

Изменение кинетического момента массы материала, поступающей за время dtна диск сепаратора, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω, определяется по формуле

$$dK_z = dK_{z1} - dK_{z0} = q\,R^2\,\omega\,dt - 0 = q\,R^2\,\omega\,dt.$$

Из третьего уравнения системы, выражающего теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z, находим крутящий момент на валу диска радиусом R, необходимый для поддержания равномерного вращения этого диска, если производительность сепаратора равна q:

$$M = \frac{dK_z}{dt} = \frac{q\,R^2\,\omega\,dt}{dt} = q\,R^2\,\omega.$$

Ответ: $M = q\,R^2\,\omega$.

20.2. Поток измельчаемого материала поступает в центральную трубу центробежного питателя (рис. 20.2, а) планетарной мельницы и по боковым наклонным трубам подается в помольные камеры. Известны: угловая скорость ω,($с^{-1}$) равномерного вращения питателя; размер l,(м); угол α; производительность питателя q, *(кг/с)*. Определить момент *M(Н·м)*, необходимый для поддержания равномерного вращения питателя.

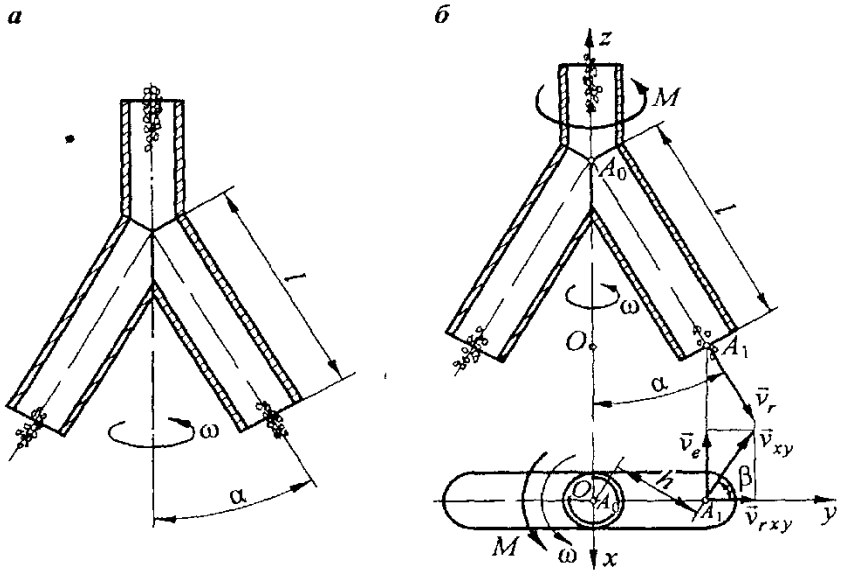


Рис. 20.2

Решение. За время *dt*в центральную трубу питателя поступает масса материала $dm=qdt$. Такая же масса за это время по наклонным трубам подается в помольные камеры.

Горизонтальная составляющая скорости поступающей в вертикальную центральную трубу элементарной массы *dm*равна нулю, поэтому и момент dK_{z0}количества движения этой массы относительно оси вращения питателя в процессе перемещения по вертикали равен нулю.

Дальнейшее движение масса *dm*совершает по наклонной трубе (рис.20.2, б), при этом абсолютная скорость *v* этой массы складывается из окружной скорости v_eпереносного движения вместе с вращающимся питателем и скорости v_rотносительного движения вдоль оси наклонной трубы. На выходе из трубы в точке A_1переносная скорость $v_e=\omega OA_1=\omega l\sin\alpha$.

В точке A_1кинетический момент массы *dm*

$$dK_{z1} = M_z(dm\,\vec{v}) = [\vec{M}_O(dm\,\vec{v})]_z,$$

где $\vec{M}_0(dm\,\vec{v})$-вектор-момент количества движения *dmv*относительно центра *O*, причем $\vec{M}_0(dm\,\vec{v}) = \vec{OA}_1 * dm\,\vec{v}$; $\vec{OA}_1$- радиус-вектор точки A_1, проведенный из центра *O*. Чтобы найти проекцию $[\vec{M}_0(dm\,\vec{v})]_z$вектора $\vec{M}_0(dm\,\vec{v})$на ось O_z, достаточно найти момент проекции *dmv*количества движения массы *dm*на плоскость *Oxy*, перпендикулярную оси O_z, относительно точки *O*пересечения оси и плоскости. Следовательно,

$$M_z(dm\,\vec{v}) = [\vec{M}_O(dm\,\vec{v})]_z = (dm)\,v_{xy}\,h,$$

где v_{xy}-модуль проекции абсолютной скорости массы *dm*на плоскость *Oxy*;

h- плечо вектора v_{xy}относительно точки *O*.

Из рис. 20.2, б видно, что

$$v_{xy} = v_e / \sin\beta, \qquad h = OA_1 \sin\beta = l \sin\alpha \sin\beta.$$

Тогда

$$dK_{z1} = M_z(dm\,\bar{v}) = (dm)(v_e / \sin\beta)(l \sin\alpha \sin\beta) =$$

$$= (q\,dt)[(\omega l \sin\alpha)/\sin\beta](l \sin\alpha \sin\beta) = q\,\omega l^2 \sin^2\alpha\, dt.$$

Изменение момента количества движения материала, поступающего за время dtв центральную трубу питателя планетарной мельницы при вращении последнего с постоянной угловой скоростью ω:

$$dK_z = dK_{z1} - dK_{z0} = q\,\omega l^2 \sin^2\alpha\, dt.$$

Из третьего уравнения, выражающего теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z, находим вращающий момент, необходимый для поддержания равномерного вращения питателя, если производительность последнего равна q:

$$M = \frac{dK_z}{dt} = \frac{q\,\omega l^2 \sin^2\alpha\, dt}{dt} = q\,\omega l^2 \sin^2\alpha.$$

Ответ: $M = q\,\omega l^2 \sin^2\alpha$.

20.10. Тележка 2 вместе с верхним строением lроторной погрузочной машины (рис. 20.3, а) движется с постоянной скоростью v=0,1 м/с относительно моста 3. К колесам тележки 4 моста приложен постоянный вращающий момент M=77,2 *кНм*. Определить угловую скорость ω моста в функции расстояния x, если известны: общая масса mсистемы тел 1-2; момент инерции J_pэтой системы относительно ее центральной оси z'; момент инерции J_M, моста с тележкой 4 относительно оси ABего вращения; радиус Rколес тележки моста; моменты M_cи M_c'сил сопротивлений; расстояние KB=1; причем m=520 т; J_p=3,3·10^5 тм^2; J_M=1,4·10^5 тм^2; R=0,5 м; M_c=77 кН·м; M_c'=2 кН·м; l=40 м. Вращение моста начинается в тот момент, когда x=x_0=10м.

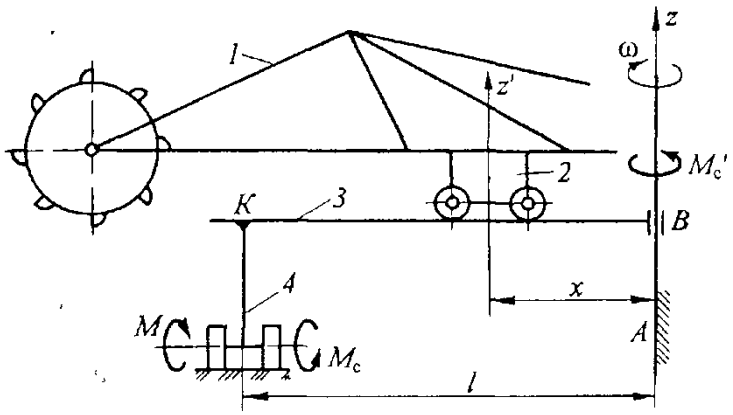


Рис. 20.3, а

Решение. Рассмотрим вращательное движение механической системы, состоящей из тележки 2 вместе с верхним строением lпогрузочной машины, а также моста 3 и его тележки 4, вокруг оси zпри условии, что тележка 2 находится на расстоянии xот этой оси (рис. 20.3, б).

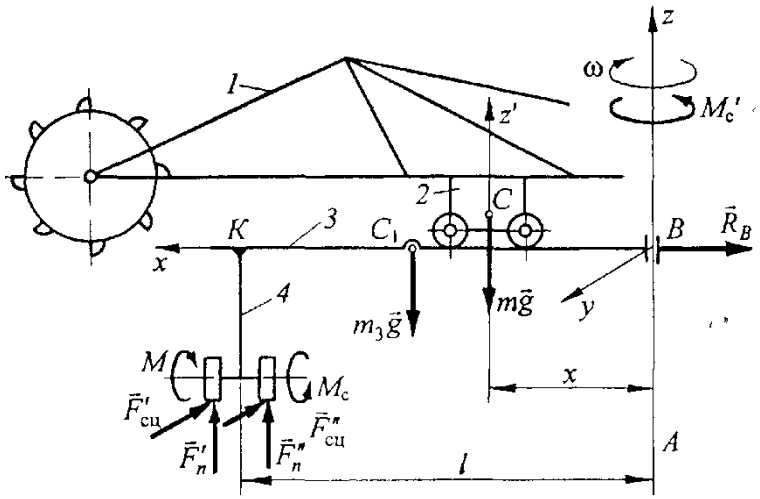


Рис. 20.3, б

На основании теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно оси *z* имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_k^e),$$

где K_z- кинетический момент системы относительно оси ее вращения, $K_z = K_{z1\text{-}2} + K_{z3\text{-}4}$;

$K_{z1\text{-}2}$ -кинетический момент тележки 2 вместе с верхним строением *l* относительно оси *z*, $K_{z1\text{-}2} = J_{z1\text{-}2}\omega$;

$J_{z1\text{-}2}$- момент инерции системы тел 1-2 относительно оси вращения моста; по теореме Гюйгенса - Штейнера (см. [2, §103]) $J_{z1\text{-}2} = J_p + mx^2$;

$K_{z3\text{-}4}$ -кинетический момент моста 3 с тележкой 4 относительно оси *z*,

$K_{z3\text{-}4} = J_M\omega$

С учетом этих пояснений находим, что в произвольный момент времени кинетический момент системы относительно оси ее вращения

$$K_z = (J_p + mx^2 + J_м)\,\omega,$$

а в начальный момент времени, когда $\omega = \omega_0 = 0$,

$$K_{z(0)} = (J_p + mx_0^2 + J_м)\,\omega_0 = 0.$$

Внешние силы и моменты сил, действующие на рассматриваемую систему (рис. 20.3, б): сила тяжести *mg*группы тел 1-2, приложенная в точке *C*на центральной оси *z*' этой группы; сила тяжести m_3gгруппы тел 3-4, приложенная в центре масс C_1этой группы; реакция R_Bшарнира *B*; силы сцепления $F_{сц}'$и $F_{сц}''$колес тележки 4 с опорной поверхностью; реакции F'_nи F''_nопорной поверхности; момент M_c'сил сопротивления вращению моста 3; приложенные к оси колес тележки 4 вращающий момент *M*и момент M_cсил сопротивления качению этих колес.

Принимая для упрощения решения положительным такое направление моментов сил относительно оси *z* вращения роторной машины, которое совпадает с указанным в условии направлением ее угловой скорости ω (см. рис. 20.3, а), находим проекцию главного момента внешних сил на ось *z*:

$$M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_т - M_c',$$

где M_m-вращающий момент, передаваемый тележкой 4 мосту 3 в результате действия приложенных к колесам этой тележки моментов *M*и M_cи сил сцепления

$F_{сц}'$и $F_{сц}''$.

Для определения M_mпредставим алгебраическую сумму моментов Mи M_cв виде пары сил F, F'', перпендикулярных плоскости чертежа 20.3, б. Сила F, приложенная к оси ведущей колесной пары тележки 4, заставляет вращаться всю систему вокруг оси z, а сила F', действующая на уровне опорной плоскости колес, уравновешивается силами сцепления $F_{сц}'$и $F_{сц}''$(последнее вытекает из условия равновесия ведущей колесной пары, составленного в форме моментов относительно ее продольной горизонтальной оси). Поскольку плечо пары сил F, F' принято равным радиусу Rколеса тележки моста, то модуль каждой из сил этой пары $F=(M-M_c)/R$.

Таким образом, действие силы Fэквивалентно действию моментов Mи M_cи сил сцепления $F_{сц}'$и $F_{сц}''$. Момент этой силы относительно оси вращения рассматриваемой механической системы

$$M_т = F\,l = (M - M_c)\,l / R\,.$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получаем

$$\frac{dK_z}{dt} = (M - M_c)\frac{l}{R} - M_c'.$$

Разделяем переменные и интегрируем, заметив предварительно, что при t=0 система находилась в покое и $K_{z(o)}=0$:

$$\int_0^{K_z} dK_z = \left[(M - M_c)\frac{l}{R} - M_c'\right]\int_0^t dt,$$

или

$$K_z = \left(J_р + J_м + mx^2\right)\omega = \left[(M - M_c)\frac{l}{R} - M_c'\right]t,$$

откуда

$$\omega = \frac{(M - M_c)\,l / R - M_c'}{J_р + J_м + mx^2}\,t.$$

Поскольку в задаче требуется определить зависимость угловой скорости от расстояния x, необходимо исключить из уравнения (4) время t, для чего воспользуемся законом равномерного движения тележки 2 вместе с верхним строением l относительно моста 3 (по условию v=0,1 м/с=*const*):

$$x = x_0 + vt, \text{ следовательно, } t = (x - x_0)/v\,.$$

Подставляя это значение tи заданные в условии числовые величины в уравнение (4), получаем

$$\omega = \frac{(M - M_c)\,l / R - M_c'}{(J_р + J_м + mx^2)\,v}(x - x_0) =$$

$$= \frac{(77{,}2 - 77)\,40 / 0{,}5 - 2}{(3{,}3\cdot 10^5 + 1{,}4\cdot 10^5 + 520\,x^2)\,0{,}1}(x - 10) = \frac{1{,}4\,(x - 10)}{4700 + 5{,}2\,x^2}\ \ (\text{с}^{-1}).$$

Ответ: $\omega = \dfrac{(M - M_c)\,l / R - M_c'}{(J_р + J_м + mx^2)\,v}(x - x_0) = \dfrac{1{,}4\,(x - 10)}{4700 + 5{,}2x^2}\ \ (\text{с}^{-1})$.

Практическая работа №21
ТЕОРЕМАОБИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТАСИСТЕМЫ.

Момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра О - это векторная величина $\vec{M}_0\left(m\vec{v}\right)$, *определяемая равенством*

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v},$$

где *r*- радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра *О*.

*Главным моментом количеств движения (*или *кинетическим моментом) системы относительно данного центра О называют геометрическую сумму моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:*

$$\vec{K}_O = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_O\left(m_j\vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\vec{r}_j \times m_j\vec{v}_j\right),$$

где *j*=1,..., *n*- номер точки; *n*- число точек.

Проекции вектора $\vec{K}_0$ на координатные оси *Oxyz*-это *кинетические моменты системы относительно данных осей*:

$$K_x = K_{Ox}, \quad K_y = K_{Oy}, \quad K_z = K_{Oz}.$$

Каждый из этих моментов равен алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно соответствующей оси:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum_{j=1}^{n} M_x\left(m_j\vec{v}_j\right), \\ K_y &= \sum_{j=1}^{n} M_y\left(m_j\vec{v}_j\right), \\ K_z &= \sum_{j=1}^{n} M_z\left(m_j\vec{v}_j\right). \end{aligned}\right\}$$

Кинетический момент системы относительно ее центра масс С

$$\vec{K}_C = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_C\left(m_j\vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}'_j \times m_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}'_j \times m_j\vec{v}'_j,$$

где r'_j-радиус-вектор *j*-й точки системы, проведенный из центра масс *С*; $\vec{v}_j$- абсолютная скорость точки; $\vec{v}'_j$- скорость точки относительно осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

Связь между кинетическими моментами $\vec{K}_0$ и $\vec{K}_c$:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times \vec{Q} = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C,$$

где r_c- радиус-вектор центра масс системы, проведенный из выбранного ранее центра *О*; *Q* -количество движения системы; v_c-скорость центра масс.

При поступательном движении тела

$$\vec{K}_C = 0, \quad \vec{K}_O = \vec{r}_C \times \vec{Q} = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C.$$

При сферическом движении тела вокруг неподвижного центра *О*проекции

кинетического момента $\vec{K}_0$ определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{zx}\omega_z, \\ K_y &= -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z, \end{aligned}\right\}$$

где J_x, J_y, J_z-осевые моменты инерции; J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}-центробежные моменты инерции; ω_x, ω_x, ω_z- проекции вектора угловой скорости на декартовы координатные оси.

Если *x, y, z*- главные оси инерции тела в центре *O*, то

$$K_x=J_x\omega_x,\ K_y=J_y\omega_y,\ K_z=J_z\omega_z.$$

В частном случае вращательного движения тела вокруг неподвижной оси, например O_z, ω_x-ω_y=0, ω_z=ω, при этом

$$K_x = -J_{zx}\omega,\quad K_y = -J_{yz}\omega,\quad K_z = J_z\omega.$$

Теорема об изменении кинетического момента системы устанавливает, как изменяется со временем вектор $\vec{K}_0$: *первая производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно этого центра*, т.е.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

Проецируя обе части уравнения на неподвижные оси координат *Oxyz*, получим выражения, соответствующие теореме моментов относительно любой неподвижной оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e,\ \frac{dK_y}{dt} = M_y^e,\ \frac{dK_z}{dt} = M_z^e.$$

Закон сохранения кинетического момента системы: если

$$\vec{M}_O^e = 0,\ \text{то}\ \ \vec{K}_O = \text{const};\quad \text{если}\ M_x^e = 0,\ \text{то}\ \ K_x = \text{const}.$$

Если центр моментов *A*движется со скоростью v_A, то справедлива формула

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^e + \vec{Q}\times\vec{v}_A = \vec{M}_A^e + m\vec{v}_C\times\vec{v}_A.$$

Второе слагаемое в правой части выражения равно нулю, когда векторы v_Aи v_cколлинеарные или когда подвижным центром моментов является центр масс системы; в последнем случае

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e.$$

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси z:

$$J_z\varepsilon = M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_k^e),$$

где J_z-момент инерции тела относительно оси вращения; ε- угловое ускорение тела; $M_z^e = \sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right)$- проекция главного момента $\vec{M}_O^e$ внешних сил $\vec{F}_k^e$ на ось вращения, равная сумме моментов этих сил относительно оси *z*.

*Дифференциальные уравнения сферического движения тела*получаются из уравнений, причем можно использовать любые оси с началом в неподвижной точке этого тела, относительно которых моменты инерции последнего не меняются. Эти оси могут быть подвижными, но не обязательно связанными с телом. Для определения неизвестных реакций связей дополнительно применяют теорему о движении центра масс системы. Система дифференциальных уравнений сферического движения тела в векторной форме:

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a}_C &= \vec{R}^e, \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{K}_O = \vec{M}_O^e, \end{aligned}\right\}$$

где $\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt}$ - локальная производная вектора $\vec{K}_0$ в подвижных осях; Ω- угловая скорость подвижных осей; $\vec{R}^e$ и $\vec{M}_O^e$-главный вектор и главный момент внешних сил, действующих на тело.

Если в качестве подвижных осей выбрать главные оси инерции тела в точке O, то из второго уравнения системы получим динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} J_x\varepsilon_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_x, \\ J_y\varepsilon_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x &= M_y, \\ J_z\varepsilon_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_z, \end{aligned}\right\}$$

где ε_x, ε_y, ε_z и ω_x, ω_y, ω_z- проекции мгновенного углового ускорения ε и мгновенной угловой скорости ω данного тела на координатные оси.

21.1. Устройство для разгрузки вагонеток (опрокид) представляет собой опирающийся на ролики барабан, внутри которого помещается вагонетка (рис. 21.1, а) Общая масса барабана с вагонеткой m; момент инерции относительно оси барабана J; центр масс C находится на расстоянии eот указанной оси; радиус барабана R; радиус роликов r, к приводному ролику приложен постоянный вращающий момент M. Пренебрегая массой роликов, определить угловую скорость и угловое ускорение барабана в зависимости от угла его поворота, если при φ=0 угловая скорость ω_0=0.

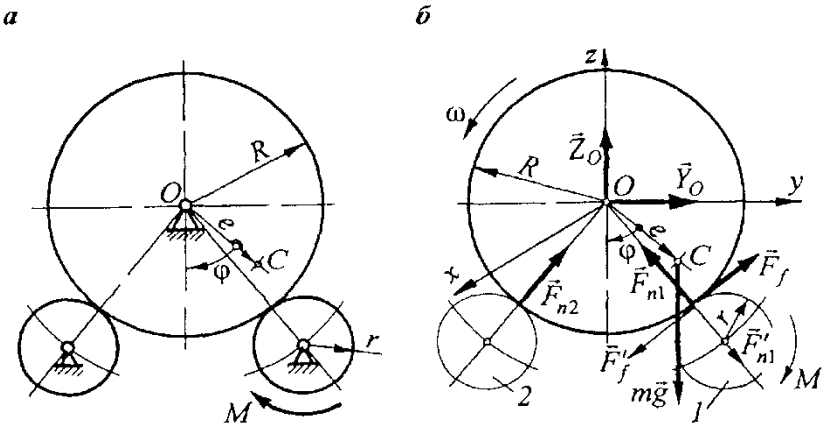


Рис. 21.1

Решение. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из барабана с находящейся внутри него вагонеткой. Покажем все действующие на эту

систему внешние силы (рис. 21.1, б), к которым относятся: сила *mg*тяжести барабана с вагонеткой; сила F_fсцепления барабана с опорным роликом *l*, приложенная в точке их контакта и направленная по общей касательной к ним в сторону, определяемую вращающим моментом *M*; нормальные реакции $\vec{F}_{n1}$ и $\vec{F}_{n2}$ роликов 1 и 2, а также ориентированные по осям координат составляющие $\vec{Y}_0$ и $\vec{Z}_0$ реакции $\vec{R}_0$ шарнира *O*. Учитывая, что моменты сил $\vec{F}_{n1}$, $\vec{F}_{n2}$, $\vec{Y}_0$ и $\vec{Z}_0$ относительно оси *Ox*вращения барабана равны нулю, дифференциальное уравнение вращательного движения для рассматриваемой механической системы представляем в виде

$$J\varepsilon = \sum M_x(\vec{F}_k^e) = F_f R - mge\sin\varphi.$$

Силу F_fсцепления между опорным роликом *l* и барабаном находим из уравнения равновесия ролика в виде уравнения моментов действующих на ролик сил относительно оси его вращения. При этом учитываем, что приложенная к ролику сила сцепления $\vec{F}'_f = -\vec{F}_f$, а его массой пренебрегаем. Тогда

$$F'_f r - M = 0$$

и, следовательно,

$$F'_f = F_f = M/r.$$

Подставляя выражение в уравнение, получаем

$$J\varepsilon = MR/r - mge\sin\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{MR/r - mge\sin\varphi}{J}.$$

Для определения угловой скорости барабана представим левую часть уравнения в виде

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение и разделяя переменные, получаем

$$\omega\, d\omega = \frac{MR/r - mge\sin\varphi}{J}\, d\varphi.$$

Интегрируем это дифференциальное уравнение, учитывая, что при φ_o=0 начальная угловая скорость барабана ω_o=*0*:

$$\int_0^{\omega}\omega\, d\omega = \frac{1}{J}\int_0^{\varphi}\left(\frac{MR}{r} - mge\sin\varphi\right)d\varphi,$$

следовательно,

$$\frac{\omega^2}{2}\Big|_0^{\omega} = \frac{1}{J}\left[\frac{MR}{r}\varphi - mge\,(-\cos\varphi)\right]\Big|_0^{\varphi},$$

или

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{J}\left\{\frac{MR}{r}\varphi - mge\left[-\cos\varphi - (-1)\right]\right\},$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{J}\left[M\varphi R/r - mge\,(1-\cos\varphi)\right]}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2}{J}\left[M\varphi R/r - mge(1-\cos\varphi)\right]}$;

$$\varepsilon = \frac{MR/r - mge\sin\varphi}{J}.$$

21.2. Механическая характеристика электродвигателя (зависимость крутящего момента Mна валу двигателя от его угловой скорости ω) выражается уравнением $M=M_н+k(\omega_н-\omega)$, где $M_н$- номинальный крутящий момент; k- положительная постоянная (крутизна характеристики); ω_H- номинальная угловая скорость. Момент инерции ротора двигателя равен J. В некоторый момент времени $t_0=0$ момент сил сопротивления на валу двигателя, вращающемуся с номинальной угловой скоростью, возрастает на величину ΔM по сравнению с номинальным. Определить закон изменения угловой скорости $\omega=\omega(t)$ и ее предельное значение ω.

Решение. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела применительно к вращению ротора двигателя вокруг центральной оси xимеет вид

$$J\varepsilon = \sum M_x(\bar{F}_k^e) = M - M_c,$$

где $\varepsilon = d\omega/dt;\ M = M_н + k(\omega_н - \omega);\ M_c = M_н + \Delta M.$

Следовательно,

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_н + k(\omega_н - \omega) - (M_н + \Delta M),$$

откуда

$$\frac{d\omega}{\omega - \omega_н + \Delta M/k} = -\frac{k}{J}dt.$$

Интегрируем это дифференциальное уравнение, учитывая, что при $\varphi_o=0$ начальная угловая скорость барабана $\omega_o=\omega_\pi$:

$$\int_{\omega_н}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega - \omega_н + \Delta M/k} = -\frac{k}{J}\int_0^t dt.$$

В результате получаем

$$\ln\left(\omega - \omega_н + \Delta M/k\right)\Big|_{\omega_н}^{\omega} = -\frac{k}{J}t\Big|_0^t.$$

После подстановки пределов имеем

$$\ln\frac{\omega - \omega_н + \Delta M/k}{\Delta M/k} = -\frac{k}{J}t,$$

или

$$\omega - \omega_н + \frac{\Delta M}{k} = \frac{\Delta M}{k}e^{-kt/J},$$

откуда

$$\omega = \omega_н - \Delta M(1 - e^{-kt/J})/k.$$

Предельное значение ω угловой скорости вращения ротора определяем из уравнения при $t \to \infty$:

$$\omega^* = \lim_{t\to\infty}\omega = \lim_{t\to\infty}[\omega_н - \Delta M(1 - e^{-kt/J})/k] = \omega_н - \Delta M/k.$$

Ответ: $\omega = \omega_н - \Delta M(1 - e^{-kt/J})/k;\ \ \omega^* = \omega_н - \Delta M/k.$

21.3. Определить закон изменения угловой скорости $\omega=\omega(t)$ ротора двигателя вентиляционной установки, если уравнение механической характеристики двигателя

$M_д(\omega)=M_1-k_1\omega$; момент сил сопротивления, приведенный к валу двигателя, $M_C=M_2+k_2\omega^2$, где M_1, M_2, k_1, k_2, - константы; момент инерции установки, приведенный к валу двигателя, J; начальная угловая скорость $\omega_o=0$. Найти предельную угловую скорость ротора.

Решение. Для исследования вращательного движения ротора двигателя вокруг продольной оси *x*воспользуемся дифференциальным уравнением, которое в данном случае имеет следующий вид:

$$J\varepsilon = \sum M_x(\bar{F}_k^e) = M_д(\omega) - M_c,$$

где $\varepsilon = d\omega / dt$; $M_д(\omega) = M_1 - k_1\omega$; $M_c = M_2 + k_2\omega^2$.

Вводя обозначение $M_o=M_1-M_2$, получаем

$$J\frac{d\omega}{dt} = (M_1 - k_1\omega) - (M_2 + k_2\omega^2) = -(k_2\omega^2 + k_1\omega - M_0),$$

откуда

$$J\frac{d\omega}{k_2\omega^2 + k_1\omega - M_0} = -dt.$$

Интегрируем это дифференциальное уравнение, учитывая, что при $\varphi_0 = 0$ начальная угловая скорость барабана ω_0=0:

$$J\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{k_2\omega^2 + k_1\omega - M_0} = -\int_0^t dt.$$

В левой части уравнения содержится табличный интеграл типа $\int\frac{dx}{dx^2 + bx + a}$ который при $\Delta = b^2 - 4ad > 0$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\frac{2dx + b - \sqrt{\Delta}}{2dx + b + \sqrt{\Delta}} + C.$$

В нашем примере

$$\Delta = k_1^2 - 4(-M_0)k_2 = k_1^2 + 4k_2M_0 > 0,$$

поэтому решение уравнения имеет вид

$$\frac{J}{\sqrt{k_1^2 + 4k_2M_0}}\ln\frac{2k_2\omega + k_1 - \sqrt{k_1^2 + 4k_2M_0}}{2k_2\omega + k_1 + \sqrt{k_1^2 + 4k_2M_0}}\Bigg|_0^{\omega} = -t\Big|_0^t,$$

или (после подстановки пределов)

$$\frac{J}{\sqrt{k_1^2+4k_2M_0}}\ln\frac{\left(2k_2\omega + k_1 - \sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)\left(k_1 + \sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)}{\left(2k_2\omega + k_1 + \sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)\left(k_1 - \sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)} = -t.$$

Введем обозначения:

$$c = \frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2M_0}}{J} \quad \text{и} \quad \omega_{1,2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4k_2M_0}}{2k_2},$$

с учетом которых предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{c}\ln\frac{(\omega - \omega_1)(-\omega_2)}{(\omega - \omega_2)(-\omega_1)} = -t,$$

или

$$\frac{(\omega-\omega_1)\,\omega_2}{(\omega-\omega_2)\,\omega_1}=e^{-ct},$$

откуда

$$\omega=\omega_1(1-e^{-ct})/[1-(\omega_1/\omega_2)\,e^{-ct}].$$

Предельное значение ω угловой скорости вращения ротора определяем из уравнения при $t\to\infty$:

$$\omega^*=\lim_{t\to\infty}\omega=\lim_{t\to\infty}\{\omega_1(1-e^{-ct})/[1-(\omega_1/\omega_2)\,e^{-ct}]\}=\omega_1.$$

Ответ: $\omega=\omega_1(1-e^{-ct})/[1-(\omega_1/\omega_2)\,e^{-ct}]$,

где $\omega_{1,2}=\left(-k_1\pm\sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)\Big/(2k_2)$;

$c=\sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\,/J$; $M_0=M_1-M_2$.

Предельная угловая скорость $\omega^*=\lim_{t\to\infty}\omega=\omega_1=$

$$=\left(-k_1+\sqrt{k_1^2+4k_2M_0}\right)\Big/(2k_2)=(-k_1+cJ)/(2k_2).$$

21.4. Вал 1 (рис. 21.2, а), момент инерции которого J_1, связан с валом 2 гидравлической муфтой 3, передающей момент $M_r=k(\omega_1-\omega_2)$, где k-положительная постоянная; ω_1, ω_2- угловые скорости валов. В начальный момент времени валы неподвижны, затем вал l начинает вращаться под действием постоянного момента M_1. Вращение вала 2 начинается в тот момент времени t_1, когда крутящий момент, передаваемый муфтой, становится равным моменту M_2сил сопротивления вращению этого вала ($M_2<M_1$). Найти значения времени t_1и угловой скорости ω_1 вала l, соответствующие этому положению.

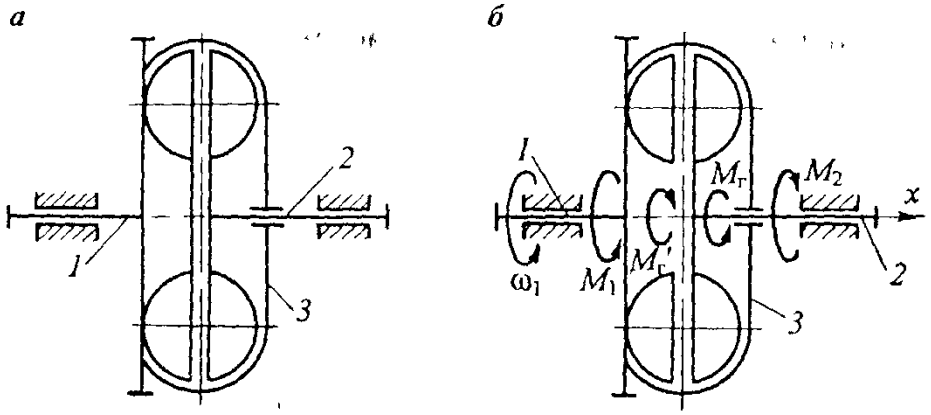


Рис. 21.2

Решение. Угловую скорость ω_1 вала l. при КОТОРОЙ начинает вращаться вал 2 (рис. 21.2, б), определяем из условия, что в этот момент времени крутящий момент $M_г$, передаваемый муфтой 3, равняется моменту M_2сил сопротивления вращению вала 2, т.е.

$$M_r=M_2\ \ (\text{при}\ \ \omega_2=0),\ \text{или}\ \ k\omega_1^2=M_2,$$

откуда

$$\omega_1=\sqrt{M_2/k}.$$

Момент времени t_1 начала вращения вала 2 находим, рассматривая параметры

вращательного движения вала *l*, для чего воспользуемся дифференциальным уравнением. В этот момент к валу *l*, кроме действующего на него постоянного крутящего момента M_1приложен со стороны муфты 3 момент $M_г$ сил сопротивления, численно равный, как указывалось выше, моменту M_2сил сопротивления вращению вала 2:

$$M'_г = M_г = M_2 = k\omega_1^2.$$

Тогда

$$J_1\varepsilon_1 = \sum M_x(\vec{F}_k^e) = M_1 - M'_г = M_1 - k\omega_1^2,$$

где $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$- угловое ускорение вала *l*.

Подставляем в уравнение, значение ε_1, разделяем переменные и интегрируем, учитывая, что по условию задачи валы в начальный момент времени неподвижны:

$$J_1 \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{M_1 - k\omega_1^2} = \int_0^{t_1} dt.$$

В левой части уравнениясодержится табличный интеграл типа $\int \frac{dx}{a - bx^2}$ который вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C.$$

Следовательно, решение уравнения (3) имеет вид

$$\frac{J_1}{2\sqrt{M_1 k}} \ln \frac{\sqrt{M_1} + \omega_1\sqrt{k}}{\sqrt{M_1} - \omega_1\sqrt{k}} \Bigg|_0^{\omega_1} = t\Big|_0^{t_1},$$

или, с учетом уравнения (1) и после подстановки пределов,

$$\frac{J_1}{2\sqrt{M_1 k}} \left(\ln \frac{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2/k}\,\sqrt{k}}{\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2/k}\,\sqrt{k}} - \ln \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1}} \right) = t_1,$$

но $\ln\left(\sqrt{M_1}/\sqrt{M_1}\right) = \ln 1 = 0$, поэтому

$$t_1 = \frac{J_1}{2\sqrt{M_1 k}} \left(\ln \frac{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}} \right).$$

Ответ: $t_1 = \frac{J_1}{2\sqrt{M_1 k}} \ln \frac{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{M_2}{k}}$.

Практическая работа №22
МОЩНОСТЬ СИЛЫ

Мощность силы - это скалярная мера механического взаимодействия, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени, и равная скалярному произведению вектора силы F на скорость v точки ее приложения:

$$P = dA/dt = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\alpha.$$

Если работа Aпроизводится равномерно, то мощность

$$P = A/t_1,$$

где t_1- время, в течение которого совершена работа.

Мощность, элементарная и полная работа силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$\left.\begin{aligned} P &= M_z(\vec{F})\,\omega, \\ dA &= M_z(\vec{F})\,d\varphi, \quad A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z(\vec{F})\,d\varphi, \end{aligned}\right\}$$

где $M_z(F)$- момент силы относительно оси вращения тела;

$d\varphi=\omega\cdot dt$-элементарный угол поворота тела;

φ_0 и φ- начальная и конечная угловые координаты тела.

При решении задач на вычисление работы и мощности нередко приходится использовать понятие *коэффициента полезного действия* η, равного отношению полезной работы $A_П$к работе $A_Д$движущих сил (или отношению полезной мощности $P_П$, если она вычислялась при равномерной работе, к мощности $P_Д$движущих сил):

$$\eta = A_п / A_д = P_п / P_д.$$

22.1. Насос шахтной водоотливной установки подает за 1 ч - 180 м^3 воды на максимальную высоту 85 м. Определить мощность двигателя насоса, если коэффициент полезного действия установки η=0,8.

Решение. Поскольку никаких дополнительных указаний в условии задачи не оговорено, считаем, что насос работает равномерно, поэтому полезную его мощность $P_П$определяем по формуле:

$$P_п = A / t_1,$$

где A-работа, затраченная за время t_1на подачу массы mводы на максимальную высоту h. Эту работу определяют по формуле:

$$A = mgh = V\gamma gh.$$

Здесь g-ускорение силы тяжести, g=9,81 м/с^2; h- высота подъема воды, h=85 м; V-объем воды, перекачиваемой насосом за время t_1=1ч=3600 с, V=180 м^3; γ-плотность воды, γ=1 т/м^3.

Теперь с учетом формулы можно подсчитать величину необходимой мощности $P_{ДВ}$двигателя насоса:

- $$P_{дв} = \frac{P_п}{\eta} = \frac{A}{t_1\eta} = \frac{V\gamma gh}{t_1\eta} = \frac{180\cdot 1\cdot 9{,}81\cdot 85}{3600\cdot 0{,}8} = 52{,}116 \text{ кВт}.$$

Ответ: $P_{дв}$ = 52,116 кВт.

22.2. Для определения натяжений набегающей ($S_{НБ}$) и сбегающей ($S_{СБ}$) ветвей конвейерной ленты привод Aконвейера установили на катки и включили динамометр Dмежду приводом и неподвижной стойкой C(рис. 22.1, а). Определить указанные натяжения, если известны: показание динамометра F(*кН*), диаметр приводного барабана *d(м)*, потребляемая электродвигателем мощность *P(кВт)*, частота вращения барабана η(мин$^{-1}$).

Решение. Рассмотрим равновесие приводного барабана конвейера, считая режим движения установившимся и пренебрегая трением при перемещении корпуса на катках.

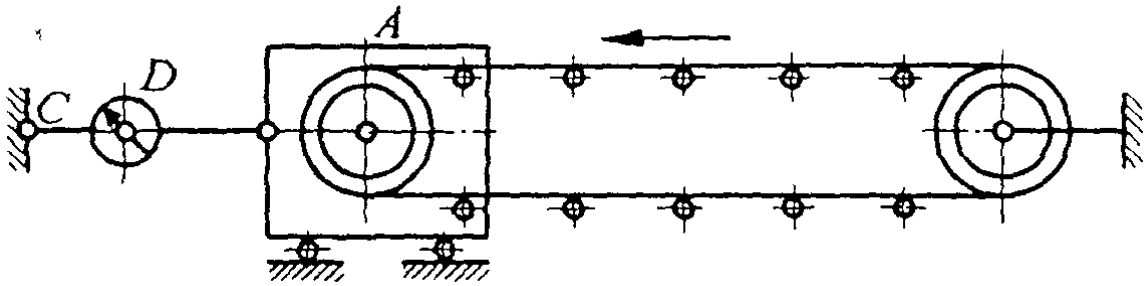


Рис. 22.1, а

Поскольку на корпус привода не действует никаких горизонтальных сил, кроме натяжения *F*пружины динамометра *D*и горизонтальных составляющих X_1и X_2реакций опор вала барабана, то сумма величин этих горизонтальных реакций численно равна показанию *F*динамометра.

При заданном направлении движения конвейерной ленты (рис. 22.1, б) верхняя ветвь считается набегающей на приводной барабан, а нижняя - сбегающей; натяжения этих ветвей обозначают соответственно $S_{нб}$и $S_{сб}$.

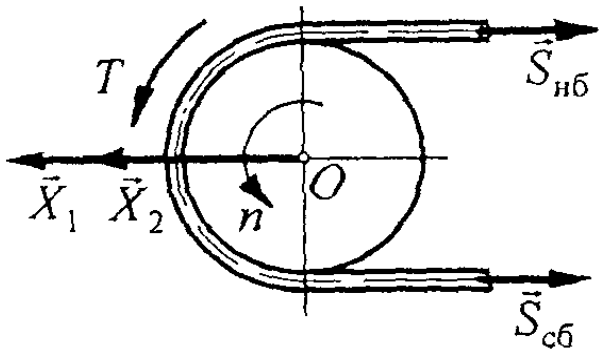


Рис. 22.1, б.

Определение вертикальных составляющих реакций опор в задаче не требуется, поэтому из трех уравнений равновесиябарабана используем только два:

$$\sum X_k = S_{нб} + S_{сб} - X_1 - X_2 = S_{нб} + S_{сб} - F = 0,$$

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = T - S_{нб}\frac{d}{2} + S_{сб}\frac{d}{2} = 0,$$

где *T*-крутящий момент, передаваемый барабану от электродвигателя и определяемый по заданной мощности *P*и частоте вращения: $T=P/\omega=P/(\pi n/30)=9{,}55\,P/n$.

Решая совместно уравнения равновесия, получаем

$$S_{нб} = 0{,}5F + T/d = 0{,}5F + 9{,}55P/(nd),$$

$$S_{сб} = 0{,}5F - T/d = 0{,}5F - 9{,}55P/(nd).$$

Ответ: $S_{нб} = 0{,}5F + 9{,}55P/(nd)$; $S_{сб} = 0{,}5F - 9{,}55P/(nd)$.

22.3. При установившемся режиме работы шаровой барабанной мельницы поперечное сечение шаровой загрузки имеет форму правильного сегмента, ось симметрии которого составляет угол β с вертикалью (рис. 22.2). Средняя плотность загрузки ρ, угловая скорость барабана ω, радиус барабана *R*,его длина *L*.Определить, при каком отношении объема загрузки к объему барабана мощность, затрачиваемая на поддержание его вращения и циркуляцию загрузки, будет максимальной. Чему равна величина этой максимальной мощности?

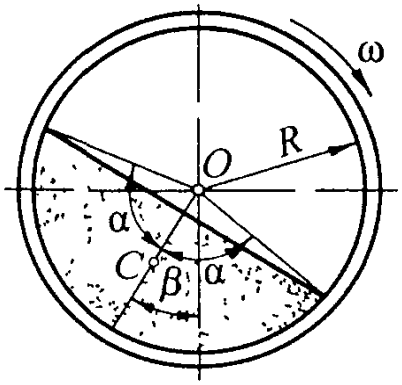


Рис. 22.3

Решение. Пренебреги сопротивлением перекатыванию шаров и трением в опорах, считаем, что при установившемся движении вся подводимая к барабану мощность затрачивается на совершение работы по преодолению сопротивления силы тяжести загрузки, причем положение центра тяжести загрузки не меняется.

Положение центра тяжести *С*кругового сегмента на оси симметрии последнего определяется расстоянием $r_c=OC$, вычисляемым по формуле.

$$r_C = \frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

где α- половина центрального угла сегмента, рад. Площадь сегмента

$$A = 0{,}5R^2(2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Объем шаровой загрузки $V=AL$, ее масса $m=V\rho=Al\rho$. Момент силы тяжести mg загрузки относительно оси *О* вращения барабана

$$M = mg\,r_C \sin\beta = AL\rho g\,r_C \sin\beta =$$

$$= \frac{R^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)L\rho g\frac{4R\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\sin\beta = \frac{2}{3}R^3L\rho g\sin^3\alpha\sin\beta.$$

Поскольку параметры *R, L, p, g*и β постоянны, то момент *М*максимален при $\sin^3\alpha=(\sin^3 a)_{max}x=1$, т.е. при $\alpha=\pi/2$, что соответствует объему загрузки, составляющему половину объема барабана. Следовательно, максимальный момент силы тяжести

$$M_{max} = (2/3)R^3L\rho g\sin\beta,$$

а мощность, затрачиваемая на его преодоление при угловой скорости ω,

$$P_{max} = M_{max}\omega = (2/3)R^3L\rho g\omega\sin\beta.$$

*Ответ:*Объем загрузки составляет половину объема барабана; $P_{мах}=(2/3)R^3L\rho g\omega sin\beta$, где g - ускорение свободного падения.

22.4. Под действием гармонической возмущающей силы $F=Hsin\omega t$ рабочий орган виброконвейера совершает гармонические поступательные колебания вдоль линии действия этой силы по закону $x=A_к sin(\omega t-\varepsilon)$. Определить среднюю за период колебаний мощность силы *F*.

Решение. Период гармонических колебаний $\tau=2\pi/\omega$, где ω- круговая частота колебаний. Работа возмущающей силы *F*за этот период

$$A = \int_0^{\tau} dA = \int_0^{\tau} F\,dx = \int_0^{\tau} (H \sin \omega t)\, d[A_к \sin(\omega t - \varepsilon)] =$$

$$= A_к H \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos(\omega t - \varepsilon)\, dt =$$

$$= A_к H \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t\, (\cos \omega t \cos \varepsilon + \sin \omega t \sin \varepsilon)\, dt =$$

$$= A_к H \omega \left[\frac{\cos \varepsilon}{\omega} \frac{\sin^2 \omega t}{2} + \frac{\sin \varepsilon}{\omega} \left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right) \right] \Bigg|_0^{2\pi/\omega} =$$

$$= \pi A_к H \sin \varepsilon .$$

Средняя за период колебаний мощность силы F

$$P_{ср} = A/\tau = (\pi A_к H \sin \varepsilon) / (2\pi/\omega) = 0{,}5 A_к H \omega \sin \varepsilon.$$

Ответ: $P_{ср} = 0{,}5 A_к H \omega \sin \varepsilon.$

Практическая работа №23
КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ.

Кинетическая энергия системы - это сумма кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2,$$

где i=1, ..., n-порядковый номер точки;

n-число точек системы;

m_1-масса i-й точки;

v_i- ее скорость.

В различных случаях движения тела его кинетическую энергию вычисляют по следующим формулам.

1. При поступательном движении

$$T = 0{,}5mv^2,$$

где m- общая масса тела; v- его скорость.

2. При вращательном движении

$$T = 0{,}5J_z\omega^2,$$

где J_z- момент инерции тела относительно оси z его вращения; ω- угловая скорость тела.

3. При плоскопараллельном движении

$$T = 0{,}5J_P\omega^2 = 0{,}5(mv_C{}^2 + J_C\omega^2),$$

где J_p- момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной направляющей плоскости (т.е. плоскости, в которой движется центр масс C) и проходящей через мгновенный центр скоростей P; v_C-скорость центра масс C; J_C-момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной направляющей плоскости.

4. При сферическом движении

$$T = 0{,}5(J_x\omega_x{}^2 + J_y\omega_y{}^2 + J_z\omega_z{}^2) - (J_{xy}\omega_x\omega_y + J_{yz}\omega_y\omega_z + J_{zx}\omega_z\omega_x).$$

Осевые и центробежные моменты инерции вычисляют относительно осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.

5. В общем случае движения свободного тела (формула Кёнига)

$$T = 0{,}5mv_C{}^2 + T',$$

где T'-кинетическая энергия в сферическом движении вокруг центра масс.

Формула справедлива для любой (в том числе изменяемой) механической системы, при этом T'-кинетическая энергия системы в ее движении относительно осей, перемещающихся поступательно вместе с центром масс.

Первая производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему (дифференциальная форма теоремы):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{k} P_j^e + \sum_{q=1}^{\upsilon} P_q^i,$$

где j=1, ..., $к$-порядковый номер внешней силы;

P_j^e - ее мощность;

k-число действующих на систему внешних сил;

q=1, ..., υ-порядковый номер внутренней силы;

P_q^i - ее мощность;

υ-число действующих на систему внутренних сил.

Уравнение следует применять в тех случаях, когда задано или требуется найти ускорение тела - линейное (при поступательном движении тела) или угловое (при вращательном движении).

Изменение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил на этом же перемещении (конечная, или интегральная, форма теоремы):

$$T - T_0 = \sum_{j=1}^{k} A_j^e + \sum_{q=1}^{\upsilon} A_q^i.$$

Уравнение следует применять в тех случаях, когда действующие на систему силы постоянны по модулю и по направлению либо для них существует силовая функция (см. ниже), а в число заданных и искомых механических величин входят кроме этих сил только скорости (линейные или угловые) и перемещения (поступательные или угловые) тел, входящих в рассматриваемую систему. Если хотя бы одна заданная переменная сила зависит от скорости, то необходимо использовать данное уравнение.

Сила потенциальна, если ее проекции

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где $U=U(x, y, z)$ -*потенциальная* (*силовая*) функция, т.е. такая функция от координат *x, y, z*,дифференциал которой равен элементарной работе.

Потенциальная энергия$П=-U$. Потенциальная энергия, как и силовая функция, зависит от координат всех точек системы. Механическая система, в которой работа совершается только потенциальными силами, называется *консервативной.*

Полная механическая энергия консервативной системы остается величиной постоянной:

$$E = T + П = \text{const}.$$

23.1. Груженый *1*и порожний 1' сосуды канатной подъемной установки (рис. 23.1) подвешены на головном канате 2, перекинутом через шкив трения 3 и огибающем отклоняющий шкив 4. Сила тяжести головного каната 2 уравновешивается силой тяжести хвостового каната 5. Известны: масса *m*груза; масса m_1каждого сосу да; моменты инерции *J*и *j*и радиусы *R*и *r*соответственно ведущего и отклоняющего шкивов; линейная плотность *q*и *q'*и длины *L*и *L'*головного и хвостового канатов соответственно. Определить ускорение, а подъемных сосудов под действием момента *M*, приложенного к шкиву трения.

Решение. Для определения ускорения подъемных сосудов воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, состоящей из груженого *l*и порожнего *l'* подъемных сосудов, подвешенных на головном канате 2, перекинутом через шкив трения 3 и огибающем отклоняющий шкив 4, причем сила тяжести головного каната 2 уравновешивается силой тяжести хвостового каната 5.

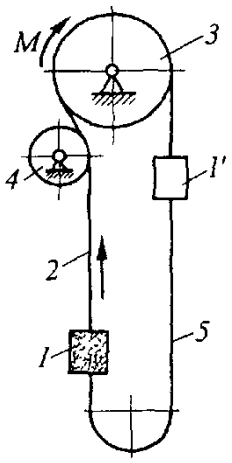


Рис. 23.1

Скорость v движения обоих сосудов одинакова, масса груженого сосуда $m_{гр}=m_1+m$, масса порожнего сосуда $m_{пор}=m_1$, следовательно, кинетическая энергия сосудов

$$T_с = 0{,}5(m_{гр} + m_{пор})\,v^2 = 0{,}5(2m_1 + m)\,v^2.$$

Массы головного и хвостового канатов соответственно равны qLи $q'L'$, а скорость их одинакова со скоростью сосудов, поэтому кинетическая энергия канатов

$$T_к = 0{,}5(qL + q'L')\,v^2.$$

Шкив трения 3 и отклоняющий шкив 4 вращаются вокруг неподвижных осей с угловыми скоростями $\omega_3=v/R$и $\omega_4=v/r$соответственно, поэтому их общая кинетическая энергия

$$T_{шк} = 0{,}5(J\omega_3^2 + j\omega_4^2) = 0{,}5(J/R^2 + j/r^2)\,v^2.$$

Суммарная кинетическая энергия системы

$$T = T_с + T_к + T_{шк} =$$
$$= 0{,}5(2m_1 + m + qL + q'L' + J/R^2 + j/r^2)\,v^2 = 0{,}5m_{пр}v^2,$$

где $m_{пр}$-приведенная к любому из сосудов масса системы,

$$m_{пр} = 2m_1 + m + qL + q'L' + J/R^2 + j/r^2.$$

Мощность сил, действующих на заданную механическую систему, складывается из мощности момента М, приложенного к шкиву трения, мощности силы тяжести поднимающегося груженого сосуда (направления силы и скорости противоположны) и мощности силы тяжести опускающегося порожнего сосуда (направление силы совпадает с направлением скорости). Считаем, что силы тяжести поднимающейся левой и опускающейся правой частей канатной системы уравновешивают друг друга. Тогда

$$\Sigma P = M\omega - m_{гр}gv + m_{пор}gv =$$
$$= [M/R - (m_1 + m)g + mg]v = (M/R - m_1g)\,v = F_{пр}v,$$

где $F_{пр}$- сила, приведенная к любому из сосудов, $F_{пр}=M/R-m_1g$. Заметим, что приведенной к данной точке механической системы силой называют воображаемую силу, которая, будучи приложена в данной точке системы и направлена по касательной к траектории этой точки, развивает такую же мощность, как и все действующие на систему силы и моменты сил, вместе взятые.

Подставляя найденные значения T и ΣP в уравнение, получаем

$$m_{пр}v\,dv/dt = F_{пр}v, \text{ или } m_{пр}\,dv/dt = F_{пр},$$

откуда

$$dv/dt = a = F_{пр}/m_{пр}.$$

Ответ: $a = F_{пр}/m_{пр}$, где $F_{пр}$ и $m_{пр}$ – сила и масса, приведенные к любому из сосудов; $F_{пр} = M/R - mg$;
$m_{пр} = m + 2m_1 + qL + q'L' + J/R^2 + j/r^2$.

23.2. Подъем бурового инструмента 1 производится с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается под действием крутящего момента Ми наматывает канат, огибающий систему блоков (рис. 23.2, а). Масса инструмента m_1, барабан - полый однородный цилиндр массой m_2и радиусом R. Определить ускорение инструмента, массой каната и блоков пренебречь.

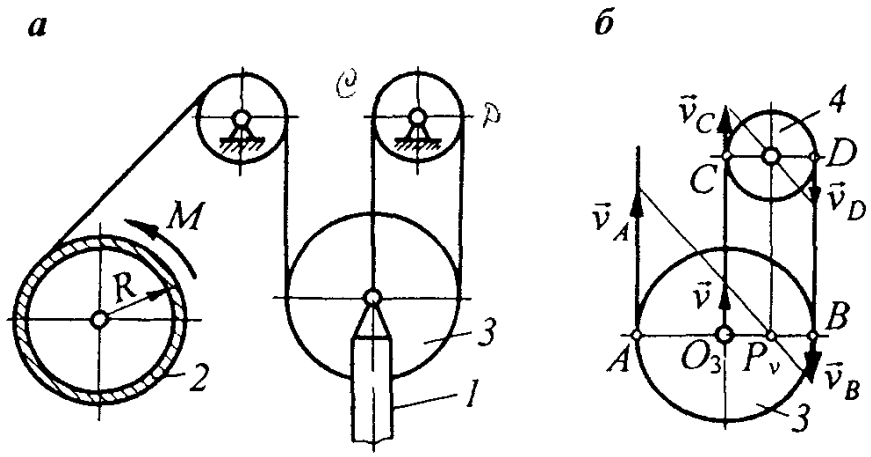


Рис 23.2

Решение. Для определения ускорения *а*инструмента воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии. Считаем, что рассматриваемая механическая система состоит из бурового инструмента 1, движущегося поступательно со скоростью v, барабана 2 лебедки, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, а также невесомых блоков и канатов, поэтому кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = 0{,}5(m_1 v^2 + J_2 \omega^2),$$

где T_1-кинетическая энергия инструмента; T_2-кинетическая энергия барабана; J_2-момент инерции барабана; считая барабан тонкостенным полым однородным цилиндром, имеем $J_2=m_2R^2$.

Чтобы установить зависимость между скоростью подъема бурового инструмента и угловой скоростью барабана, найдем скорость каната, наматываемого на барабан, численно равную скорости точки *А*головного блока 3 (рис. 23.2, б). Модули скоростей точек *С*и *D*, равные окружной скорости верхнего блока 4, одинаковы, поэтому скорости v и v_Bточек O_3 и *В*тоже равны по величине, хотя и противоположны по направлению. Соединив концы векторов v и v_Bпрямой линией, находим положение мгновенного центра скоростей P_vблока 3, причем точка P_vделит радиус O_3Bпополам. Тогда угловая скорость головного блока $\omega_3=v/(O_3P_V)=2v/R_3$, а скорость точки *А*

$$v_A = (AP_v)\,\omega_3 = 1{,}5R_3\omega_3 = 1{,}5R_3(2v/R_3) = 3v.$$

Теперь можно определить $\omega = v_A/R = 3v/R$, угловую скорость барабана, а затем преобразовать уравнение:

$$T = 0{,}5(m_1 v^2 + J_2\omega^2) = 0{,}5[m_1 v^2 + m_2 R^2 (3v/R)^2] = \\ = 0{,}5(m_1 + 9m_2)\, v^2.$$

Направления крутящего момента Ми угловой скорости ω совпадают, а направления силы тяжести m_1gи скорости v бурового инструмента противоположны, поэтому мощность действующих на систему сил складывается из положительной мощности момента *М*и отрицательной мощности силы m_1g:

$$\Sigma P = M\omega - m_1 g v = M(3v/R) - m_1 g v = (3M/R - m_1 g)\, v.$$

Подставляя найденные значения *Т*и ΣP в уравнение, получаем

$$(m_1 + 9m_2)\, v\, dv/dt = (3M/R - m_1 g)\, v,$$

или

$$(m_1 + 9m_2)\,dv/dt = 3\,M/R - m_1 g,$$

откуда

$$dv/dt = a = (3\,M/R - m_1 g)/(m_1 + 9m_2).$$

Ответ: $a = \dfrac{3M/R - m_1 g}{m_1 + 9m_2}$.

23.3. Решить предыдущую задачу, учитывая массу m_3головного блока 3 и считая его сплошным однородным диском.

Решение. Если массой m_3головного блока нельзя пренебречь, то при подсчете кинетической энергии системы кроме кинетической энергии барабана и бурового инструмента следует учесть кинетическую энергию этого блока, а в суммарную мощность внешних сил включить мощность его силы тяжести $m_3 g$.

Головной блок совершает плоскопараллельное движение, поэтому его кинетическая энергия

$$T_3 = 0{,}5(m_3 v^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_3-момент инерции блока относительно оси, проходящей через точку O_3(рис. 23.2, б) и перпендикулярной к плоскости рисунка. Блок считаем сплошным однородным цилиндром, следовательно, $J_3 = 0{,}5 m_3 R_3^2$.

Учитывая также значение угловой скорости $\omega_3 = 2v/R_3$, найденное в решении предыдущей задачи, получаем

$$T_3 = 0{,}5[m_3 v^2 + 0{,}5 m_3 R_3^2 (2v/R_3)^2] = 1{,}5 m_3 v^2.$$

Мощность силы тяжести блока

$$P_3 = - m_3 g\, v.$$

Теперь полученные уравнения, при решении задачи примут вид

$$T = 0{,}5(m_1 + 9m_2 + 3m_3)\, v^2,$$

$$\Sigma P = [3\,M/R - (m_1 + m_3)g]\, v.$$

Тогда из уравнения получаем

$$a = [3\,M/R - (m_1 + m_3)g]/(m_1 + 9m_2 + 3m_3).$$

Ответ: $a = \dfrac{3M/R - (m_1 + m_3)g}{m_1 + 9m_2 + 3m_3}$.

23.4.Найти ускорение бульдозера (рис.23.3), если его масса m=19 т, общая масса колес $m_к$=2,1 т, радиус колеса R=0,76 м, радиус инерции колеса относительно оси C_i=0,56 м, коэффициент трения качения $к$=0,09 м, угол α=10°, момент на ведущих колесах M=47,5 кН·м, сопротивление ножу F=1,5 кН.

Решение. Как и в предыдущих задачах, здесь требуется определить ускорение, поэтому для решения воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии.

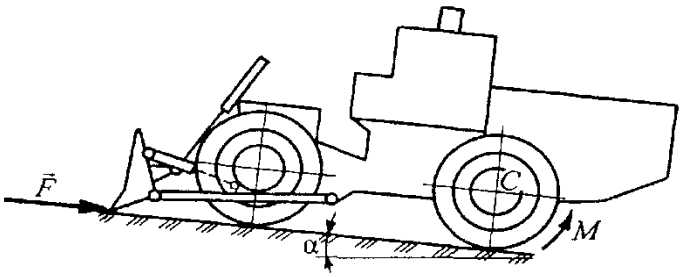


Рис.23.3

Кинетическая энергия Tбульдозера складывается из кинетической энергии T_1его корпуса, который перемещается поступательно со скоростью v, и кинетической энергии T_2колес, совершающих плоскопараллельное движение, поэтому

$$T = T_1 + T_2 = 0{,}5[mv^2 + 4(m_{1к}v^2 + J_к\omega_к^2)] =$$
$$= 0{,}5\{mv^2 + 4[m_{1к}v^2 + m_{1к}i^2(v/R)^2]\} = 0{,}5\,v^2[m + m_к(1 + i^2/R^2)],$$

где $m_{1к}$- масса каждого из четырех колес бульдозера, $m_{1к}=m_к/4$;

J_k- момент инерции колеса относительно оси, проходящей через точку Cи перпендикулярной к плоскости рисунка,$J_K=m_{1к}i^2$;

$\omega_к$- угловая скорость колеса, $\omega_к=v/R$.

Теперь необходимо найти сумму мощностей действующих на систему сил. Мощность движущего момента

$$P_M = M\omega_к = M\,v/R;$$

мощность силы Fсопротивления ножу

$$P_F = F\,v\cos 180° = -F\,v;$$

мощность сил тяжести корпуса и колес

$$P_{mg} = (mg + 4m_{1к}g)v\cos(90° + \alpha) = -(m + m_к)gv\sin\alpha;$$

мощность сил сопротивления качению колес

$$P_{с к} = -M_{с к}\omega_к = -F_n k\,v/R = -[(m + m_к)g\cos\alpha]\,k\,v/R,$$

где $M_{ск}$- момент сил сопротивления качению колес, $M_{ск}=F_nk$

F_n-сумма нормальных реакций почвы,

$$F_n = (m + m_к)g\cos\alpha.$$

Тогда

$$\Sigma P = P_M + P_F + P_{mg} + P_{с к} =$$
$$= M\,v/R - F\,v - (m + m_к)gv\sin\alpha - [(m + m_к)g\cos\alpha]\,k\,v/R =$$
$$= \{M/R - F - g(m + m_к)[\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]\}\,v.$$

Подставляя найденные значения T и ΣPв уравнение, получаем

$$[m + m_к(1 + i^2/R^2)]v\,dv/dt =$$
$$= \{M/R - F - g(m + m_к)[\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]\}\,v,$$

откуда с учетом исходных данных

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{M/R - F - g(m + m_к)[\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]}{m + m_к[1 + (i/R)^2]} =$$

$$= \frac{47{,}5/0{,}76 - 1{,}5 - 9{,}81(19 + 2{,}1)[\sin 10° + (0{,}09/0{,}76)\cos 10°]}{19 + 2{,}1[1 + (0{,}56/0{,}76)^2]} =$$

$$= 0{,}0412 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:

$$a = \frac{M/R - F - g(m + m_к)[\sin\alpha + (k/R)\cos\alpha]}{m + m_к[1 + (i/R)^2]} = 0{,}0412 \text{ м/с}^2.$$

Практическая работа №24
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.
ПринципДаламбера (методкинетостатики)

Принцип Даламбера для точки состоит в том, что *при движении материальной точки активные силы и реакции связей, действующие на точку, в каждый момент*

времени уравновешиваются силой инерции этой точки:

$$\vec{F}^{\text{а}} + \vec{F}^{R} + \vec{F}^{\text{и}} = 0,$$

где F^a-равнодействующая активных сил; F^R-равнодействующая реакций связей; $F^u=ma$-сила инерции; a-ускорение точки.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, а также сумма их моментов относительно любого центра Oравны нулю. Тогда для j-й точки системы:

$$\vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i + \vec{F}_j^{\text{и}} = 0,$$
$$\vec{M}_O(\vec{F}_j^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{\text{и}}) = 0,$$

где $\vec{F}_j^e$- равнодействующая внешних сил, действующих на точку; $\vec{F}_j^i$- равнодействующая внутренних сил;

$\vec{F}_j^u = -m_j a_j$-сила инерции; m_j- масса точки; a_j- ускорение точки;

$j=1, ...,n$-порядковый номер точки; n-число точек системы.

Для всей системы

$$\sum_{j=1}^{n}(\vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i + \vec{F}_j^{\text{и}}) = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\vec{M}_O(\vec{F}_j^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{\text{и}})\right] = 0,$$

откуда, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов относительно любого центра равны нулю, получаем

$$\vec{R}^e + \vec{R}^{\text{и}} = 0, \quad \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{\text{и}} = 0,$$

где $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_j^e$ - главный вектор внешних сил; $\vec{R}^u = \sum \vec{F}_j^u = -m\vec{a}_C$ - главный вектор сил инерции; m-масса системы; $\vec{a}_C$-ускорение центра масс системы; $\vec{M}_O^e$- главный момент внешних сил системы относительно некоторого центра O; $\vec{M}_O^u$- главный момент сил инерции относительно тогоже центра.

При поступательном движении силы инерции твердоготела приводятся к равнодействующей $R^u=-m\vec{a}_C$, проходящей через центр масс C.

Если твердое тело имеет плоскость материальной симметрии Oxyи вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости, то силы инерции тела приводятся к силе $R^u=-m\vec{a}_C$, приложенной в точке O, и к паре сил с моментом $M_{Oz}^{\text{и}} = -J_{Oz}^{\text{и}}\varepsilon$, лежащей в плоскости Oxy; ε- угловое ускорение тела. Если, кроме того, ось вращения проходит через центр масс тела, то силы инерции приводятся к одной паре сил с моментом M_{Oz}^u.

При плоском движении тела, имеющего плоскость симметрии Cxyи движущегося параллельно этой плоскости, силы инерции приводятся к лежащим в плоскости симметрии силе, равной R^uи приложенной в центре масс Cтела, и паре сил с моментом $M_{Cz}^{\text{и}} = -J_{Cz}^{\text{и}}\varepsilon$.

24.1. Ролик ленточного конвейера вращается вокруг оси O(рис. 24.1, а). Ось

O_1наружной цилиндрической поверхности корпуса ролика смещена на расстояние Δ=1 мм от оси вращения. Известны размеры корпуса: d=150 мм, D=160 мм и его масса m=11 кг. Определить динамическое давление на ось ролика в указанном на рисунке положении, вызванное смещением центра масс ролика относительно оси вращения, при скорости ленты v=4 м/с.

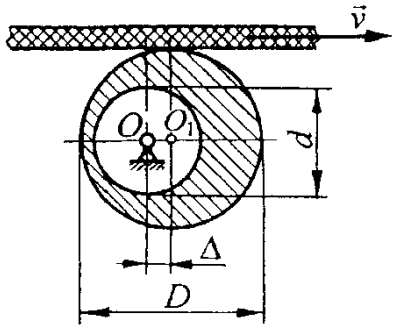


Рис. 24.1, а

Решение. В общем случае динамические реакции приводятся к силе и к паре сил, которые кинематически уравновешивают главный вектор и главный момент сил инерции. В рассматриваемой задаче требуется найти динамическое давление $F_{дин}$на ось, численно равное модулю главного вектора сил инерции, для определения которого необходимо знать ускорение центра масс ролика.

Центр масс Cролика (рис. 24.1, б) расположен на линии центров OO_1наружной и внутренней поверхностей ролика на расстоянии OCот оси его вращения, причем (см. [5, ч. 1, решение задачи 7.2])

$$OC = \Delta_C = D^2\Delta/(D^2 - d^2) = 160^2\ 1/(160^2 - 150^2) = 8{,}258 \text{ мм}.$$

В произвольном положении ролика абсолютная скорость v_Mточки Mконтакта ролика с лентой, перпендикулярная радиусу OM, складывается из горизонтальной скорости v ленты и скорости v_Bпоперечных колебаний ленты, вызванных изменением ординаты точки контакта.

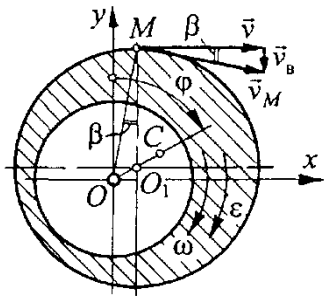


Рис. 24.1, б

Из треугольника скоростей, показанного на рис. 24.1,б, видно, что $v_M = v/\cos\beta$, где β- угол между радиусом OMи вертикалью. Угловая скорость ролика

$$\omega = v_M / OM = v/(OM\cos\beta).$$

Из рис. 24.1, б также находим, что

$$OM\cos\beta = O_1M + OO_1\cos\varphi = R + \Delta\cos\varphi,$$

где φ- угол поворота линии центров OO_1от оси ординат, отсчитываемый в направлении вращения ролика;

R- радиус наружной цилиндрической поверхности ролика, $R=D/2$. Следовательно,

$$\omega = v/(R + \Delta\cos\beta).$$

Угловое ускорение ролика

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\omega = -\frac{-v\Delta\sin\varphi}{(R+\Delta\cos\varphi)^2}\frac{v}{R+\Delta\cos\varphi} = \frac{v^2\Delta\sin\varphi}{(R+\Delta\cos\varphi)^3}.$$

В показанном на рис. 24.1, а положении ролика угол $\varphi=90°$, поэтому

$$\omega = v/R = 4/(80\ 10^{\ 3}) = 50\ \text{с}^{-1},$$

$$\varepsilon = v^2\Delta/R^3 = 4^2\ 10^{-3}/(80\ 10^{\ 3})^3 = 31{,}25\ \text{с}^{-2}.$$

Теперь можно определить составляющие главного вектора сил инерции.

Модуль нормальной (центробежной) силы инерции

$$F_n^{\text{и}} = m\,a_C^n = m\,\Delta_C\,\omega^2 = 11\ 8{,}258\cdot10^{-3}\ 50^2 \approx 227{,}1\ \text{Н}.$$

Модуль тангенциальной (касательной) силы инерции

$$F_\tau^{\text{и}} = m\,a_C^\tau = m\,\Delta_C\,\varepsilon = 11\ 8{,}258\cdot10^{-3}\ 31{,}25 \approx 2{,}84\ \text{Н}.$$

Динамическое давление на ось, равное главному вектору сил инерции $\text{R}^{\text{и}}$,

$$F_{\text{дин}} = R^{\text{и}} = \sqrt{(F_n^{\text{и}})^2 + (F_\tau^{\text{и}})^2} = \sqrt{227{,}1^2 + 2{,}84^2} \approx 227{,}12\ \text{Н}.$$

Сила тяжести ролика

$$mg = 11\cdot9{,}81 = 107{,}91\ \text{Н}.$$

Суммарное давление на ось ролика в указанном положении

$$R_O = \sqrt{(F_n^{\text{и}})^2 + (F_\tau^{\text{и}} - mg)^2} = \sqrt{227{,}1^2 + (2{,}84 - 107{,}91)^2} \approx 250{,}23\ \text{Н}.$$

Таким образом, динамическое давление, вызванное сравнительно небольшим смещением наружной поверхности ролика относительно оси его вращения, в два с лишним раза превышает силу тяжести ролика и составляет более *90 %* общего давления на ось.

Ответ: $F_{\text{дин}} \approx 227{,}12$ Н.

24.2. Барабан устройства для опрокидывания вагонеток опирается на ролики *A* и *B*, первый из которых приводной (рис. 24.2, а). Известны: масса *m* барабана с вагонеткой; момент инерции J_0 за груженного барабана относительно оси вращения *O*; размеры *r* и *R*; углы α и β; расстояние *l* от центра масс *C* до оси вращения барабана. В начальный момент времени к неподвижному приводному ролику прикладывают вращающиймомент *M*. Определить минимальный коэффициент трения $f_{\text{мин}}$ между роликом и барабаном, при котором проскальзывание между ними в начальный момент будет отсутствовать. Массой роликов пренебречь.

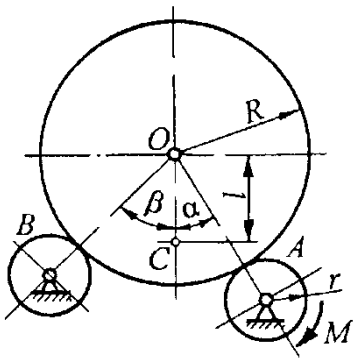


Рис. 24.2, а

Решение. На барабан (рис. 24.2, б) действуют сила тяжести *mg*, нормальные к

наружной цилиндрической поверхности реакции роликов $\vec{F}_A^{\,n}$ и $\vec{F}_B^{\,n}$ и сила трения $\vec{F}_f$ - между приводным роликом *A* и барабаном, являющаяся в данном случае движущей силой, заставляющей барабан вращаться с некоторым угловым ускорением *ε*. Применяя принцип Даламбера, добавим к этим силам силы инерции, которыеприводятся к силе $\vec{R}^{\,u} = -ma_C$, приложенной в центре *О*барабана, и к паре сил с моментом $M^u = -J_0\varepsilon$. Обращаем внимание на то, что точкой приложения силы $R^и$является именно точка *O*, а не центр масс *C*, поскольку момент инерции J_oбарабана с вагонеткой задан относительно оси *O*, вокруг которой вращается барабан.

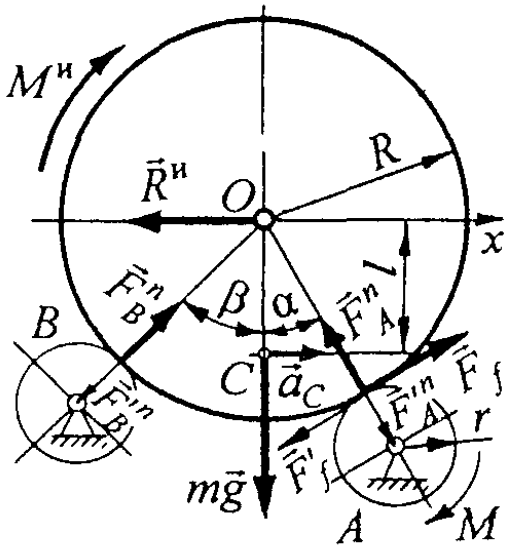


Рис. 24.2, б

Поскольку в момент начала движения угловая скорость барабана равна нулю, то ускорение $\vec{a}_C$ центра масс С равно касательному ускорению $\vec{a}_C^{\,\tau}$, модуль которого $a_C^{\tau} = \varepsilon l$, а направление определяется направлением углового ускорения *ε*. В результате получаем, что $R^u = m\varepsilon l$, причем направление вектора R^uпротивоположно положительному направлению оси *Ox*. Уравнения равновесия полученной системы сил:

$$\sum X_k = F_B^n \sin\beta - F_A^n \sin\alpha + F_f \cos\alpha - R^и = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = F_B^n \cos\beta + F_A^n \cos\alpha + F_f \sin\alpha - mg = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = F_f R - M^и = 0. \qquad (3)$$

При составлении уравнения (3) было учтено действительное направление момента сил инерции, противоположное направлению углового ускорения, следовательно, в уравнении (3) символ $M^и$обозначает модуль этого момента, т.е. $M^u = J_o\varepsilon$.

К полученным трем уравнениям добавляем уравнение равновесия приводного ролика

$$M = F'_f r.$$

По третьему закону Ньютона действующая на ролик сила трения $F'_f = F_f$, а по закону Кулона $F_f = fF_A^n$. Тогда из уравнений (3) и (4) следует, что

$$F_f = M/r \quad \text{и} \quad \varepsilon = MR/(rJ_O). \tag{5}$$

Умножая уравнение (1) на *cosβ*, а уравнение (2) - на *sinβ* и затем, вычитая из первого полученного уравнения второе, имеем после некоторых простых преобразований

$$-F_A^n \sin(\alpha+\beta) + F_f \cos(\alpha+\beta) - R^u \cos\beta + mg\sin\beta = 0.$$

Подставляя сюда $F_A^n = F_f/f$ и $R^u = m\varepsilon l$, а также выражения (5), получаем

$$-[M/(fr)]\sin(\alpha+\beta) + (M/r)\cos(\alpha+\beta) - m\varepsilon l\cos\beta + mg\sin\beta = 0,$$

откуда находим величину минимально необходимого коэффициента трения

$$f = f_{\min} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - (mlR/J_O)\cos\beta + (mgr/M)\sin\beta}.$$

Ответ: $f_{\min} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - (mlR/J_O)\cos\beta + (mgr/M)\sin\beta}$.

24.3. Скипы 1 и 2 уравновешенной подъемной установки приводятся в движение по наклонным плоскостям с помощью канатов, огибающих шкив 3 (рис. 24.3, а). Массы груженого 1 и порожнего 2 скипов одинаковы *($m_1=m_2=m=400$ т)*; общая линейная плотность канатов *q=95 кг/м*, их длина *L=600 м;* угол *α=30°;* коэффициент сопротивления движению скипов *μ=-0,01;* угол обхвата шкива канатами *β=π*; коэффициент трения канатов по шкиву *f*=0,3. Определить предельное ускорение a_{max} при подъеме груженого скипа из крайнего нижнего положения, если при этом проскальзывание канатов по шкиву отсутствует. Массой канатов длиной L_o и трением канатов о почву при их провисании пренебречь.

Указание. Предельному равновесию канатов относительно шкива соответствует зависимость $S_{нб} = S_{сб}\exp(f;\beta)$, где $S_{нб}$ и $S_{сб}$ - натяжения соответственно набегающей и сбегающей ветвей канатов.

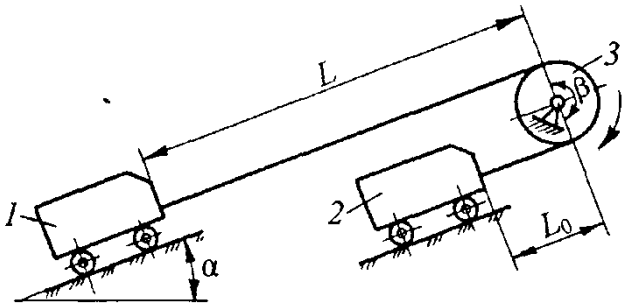


Рис. 24.3, а

Решение. Применяя принцип Даламбера для определения предельно допустимого ускорения, добавляем к действующим на рассматриваемую механическую систему силам тяжести, силам сопротивления движению скипов и реакциям опор силы инерции скипов и набегающей ветви канатов длиной *L*(рис. 24.3, б).

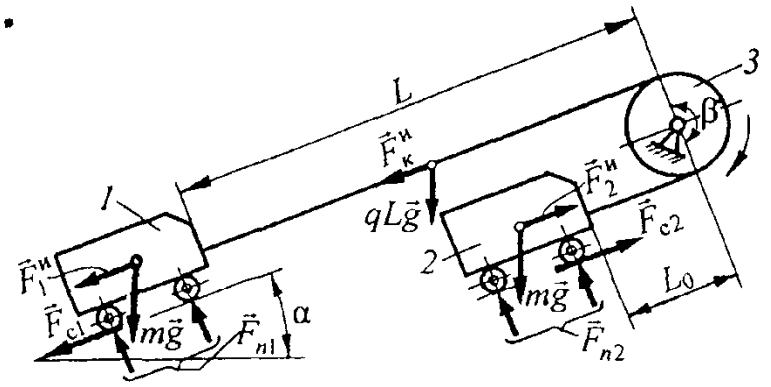


Рис. 24.3, б

Считая растяжение канатов и их упругое скольжение по шкиву пренебрежимо малыми по сравнению с перемещением скипов, полагаем, что ускорения скипов и центра масс $C_к$ набегающей ветви канатов одинаковы по модулю.

Значения модулей сил инерции:

$$F_1^и = ma,\ F_2^и = ma,\ F_к^и = qL\,a.$$

Сила сопротивления движению скипа равна произведению коэффициента сопротивления движению на сумму действующих на колеса скипа нормальных реакций опоры, при определении которых силой тяжести прикрепленных к скипам концевых участков канатов пренебрегаем. Из условия равновесия каждого скипа в виде равной нулю, суммы проекций действующих на него сил, на нормальную к опорной поверхности оси координат находим нормальные реакции рельсов:

$$F_{n1} = F_{n2} = mg\cos\alpha.$$

Модули сил сопротивления движению скипов

$$F_{c1} = F_{c2} = \mu mg\cos\alpha.$$

Тогда натяжение набегающей ветви канатов

$$S_{нб} = mg\sin\alpha + F_1^и + F_{c1} + qgL\sin\alpha + F_к^и =$$
$$= g[(m + qL)\sin\alpha + \mu m\cos\alpha] + a(m + qL).$$

Натяжение сбегающей ветви

$$S_{сб} = mg\sin\alpha - F_2^и + F_{c2} = m[g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - a].$$

В соответствии с указанием к задаче

$$S_{нб} = S_{сб}\exp(f;\beta) = S_{сб}\,e^{f\beta},$$

следовательно,

$$g[(m + qL)\sin\alpha + \mu m\cos\alpha] + a(m + qL) =$$
$$= m[g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - a]\,e^{f\beta},$$

откуда с учетом исходных данных

$$a = a_{max} = \frac{g\{[m(e^{f\beta} - 1) - qL]\sin\alpha - \mu m(e^{f\beta} + 1)\cos\alpha\}}{m(e^{f\beta} + 1) + qL} =$$

$$= \frac{9{,}81[400(e^{0{,}3\pi} - 1) - 0{,}095\cdot 600]\sin 30°}{400(e^{0{,}3\pi} + 1) + 0{,}095\cdot 600} -$$

$$-\frac{9{,}81\cdot 0{,}01\cdot 400(e^{0\,3\pi}+1)\cos 30^\circ}{400(e^{0{,}3\pi}+1)+0{,}095\cdot 600}\approx 1{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Ответ:

$$a_{\max}=\frac{g\{[m(e^{f\beta}-1)-qL]\sin\alpha-\mu m(e^{f\beta}+1)\cos\alpha\}}{m(e^{f\beta}+1)+qL}\approx 1{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Практическая работа №25
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Принцип Даламбера для механической системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы наряду с фактически действующими на нее внешними и внутренними силами приложить соответствующую силу инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, а также сумма их моментов относительно любого центра *О*равны нулю. Тогда для *j*-й точки системы:

$$\vec{F}_j^{\,e}+\vec{F}_j^{\,i}+\vec{F}_j^{\,\text{и}}=0,$$
$$\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,e})+\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,i})+\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,\text{и}})=0,$$

где $\vec{F}_j^{\,e}$ - равнодействующая внешних сил, действующих на точку;

$\vec{F}_j^{\,i}$ - равнодействующая внутренних сил;

$\vec{F}_j^{\,u}=-m_j a_j$ -сила инерции;

m_j- масса точки; a_j- ускорение точки;

$j=1, ..., n$-порядковый номер точки; n-число точек системы.

Для всей системы

$$\sum_{j=1}^{n}(\vec{F}_j^{\,e}+\vec{F}_j^{\,i}+\vec{F}_j^{\,\text{и}})=0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,e})+\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,i})+\vec{M}_O(\vec{F}_j^{\,\text{и}})\right]=0,$$

откуда, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов относительно любого центра равны нулю, получаем

$$\vec{R}^{\,e}+\vec{R}^{\,\text{и}}=0,\quad \vec{M}_O^{\,e}+\vec{M}_O^{\,\text{и}}=0,$$

где $\vec{R}^{\,e}=\sum\vec{F}_j^{\,e}$ - главный вектор внешних сил; $\vec{R}^{\,u}=\sum\vec{F}_j^{\,u}=-m\vec{a}_C$ - главный вектор сил инерции; m-масса системы; $\vec{a}_C$-ускорение центра масс системы; $\vec{M}_O^{\,e}$- главный момент внешних сил системы относительно некоторого центра *О*; $\vec{M}_O^{\,u}$- главный момент сил инерции относительно тогоже центра.

При поступательном движении силы инерции твердоготела приводятся к

равнодействующей R^u=-$m\vec{a}_C$, проходящей через центр масс *C*.

Если твердое тело имеет плоскость материальной симметрии *Oxy*и вращается вокруг оси *Oz*, перпендикулярной этой плоскости, то силы инерции тела приводятся к силе R^u=-$m\vec{a}_C$, приложенной в точке *O*, и к паре сил с моментом $M^{и}_{Oz} = -J^{и}_{Oz}\varepsilon$, лежащей в плоскости *Oxy*; *ε*- угловое ускорение тела. Если, кроме того, ось вращения проходит через центр масс тела, то силы инерции приводятся к одной паре сил с моментом M^{u}_{Oz}.

При плоском движении тела, имеющего плоскость симметрии *Cxy*и движущегося параллельно этой плоскости, силы инерции приводятся к лежащим в плоскости симметрии силе, равной R^uи приложенной в центре масс *C*тела, и паре сил с моментом $M^{и}_{Cz} = -J^{и}_{Cz}\varepsilon$.

25.1. Механизм ловителя монорельсовых полков состоит из корпуса 1, вращающегося вокруг оси *O*, и шарнирно закрепленных на нем рычагов 2, прижатых к упорам 3 пружиной 4 (рис. 25.1, а). При определенной угловой скорости корпуса происходит поворот рычагов и срабатывание ловителя. Определить момент срабатывания *t*, если корпус начинает вращаться из неподвижного состояния равноускоренно с известным угловым ускорением *ε*. Известны также масса рычага *m*; его момент инерции J_cотносительно оси, параллельной оси вращения рычага и проходящей через его центр масс *C*; усилие *F*пружины и размеры *a, b, d*и*r*, указанные на рисунке

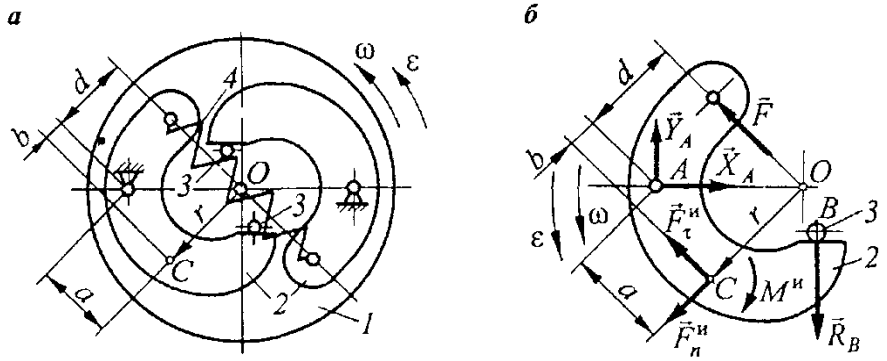


Рис 25.1

Решение. Если пренебречь трением в шарнире *A*, то на рычаг в плоскости чертежа действуют сила *F*упругости сжатой пружины, реакция R_Aшарнира *A*, показанная в виде составляющих X_A и Y_A, и нормальная к поверхности контакта реакция R_Bупора *B*(рис. 25.1, б). Применяя для решения задачи принцип Даламбера, присоединяем к этим силам силы инерции рычага, приведенные к центру масс *C*и представленные двумя составляющими $\vec{F}^{u}_{n}$ и $\vec{F}^{u}_{\tau}$ главного вектора $\vec{R}^{u}$ и парой сил с моментом M^{u}_{C}, причем

$$|\vec{F}^{и}_{n}| = ma_C^{n} = m\omega^2 r,\ |\vec{F}^{и}_{\tau}| = ma_C^{\tau} = m\varepsilon r,\ |M^{и}_{C}| = J_C\,\varepsilon.$$

Корпус ловителя вращается равноускоренно из состояния покоя, потому угловая скорость корпуса меняется по закону $\omega=\varepsilon t$, следовательно, $|\vec{F}^{и}_{n}| = m\varepsilon^2 t^2 r$.

В момент срабатывания рычаг начинает поворачиваться вокруг оси *A*, отрываясь от упора *B*, реакция $\vec{R}_B$ становится равной нулю, а уравнение равновесия

рычага принимает вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = Fd - F_n^u a - F_\tau^u b - M_C^u = 0,$$

или

$$Fd - m\varepsilon^2 t^2 ra - m\varepsilon rb - J_C\,\varepsilon = 0,$$

откуда

$$t = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{Fd - \varepsilon(J_C + mrb)}{mra}}.$$

Ответ: $t = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{Fd - \varepsilon(J_C + mrb)}{mra}}$

25.2. Груз массой *m*поднимается автокраном (рис. 25.2, а) с ускорением *a*. Масса крана (без груза) $m_к$, его центр масс находится в точке *C*; радиус барабана лебедки *R*; момент инерции барабана относительно оси вращения равен J_0. Скорость навивки каната на барабан связана со скоростью груза зависимостью $v_K = iv$, где *i*-передаточное отношение полиспастной системы. Размеры *b, c* и *l*известны. Определить давление колесных пар на грунт.

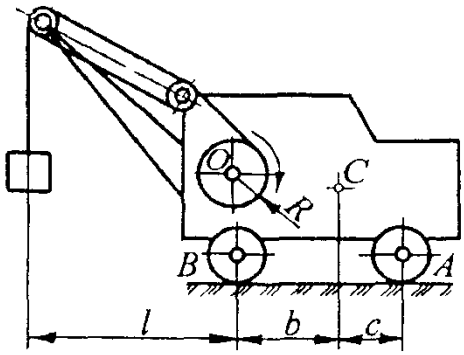


Рис 25. 2, а

Решение. Покажем на схеме (рис. 22.5, б) действующие на механическую систему силы тяжести $m_k g$и mgсоответственно крана и груза, а также реакции $\vec{F}_A^{\,n}$ и $\vec{F}_B^{\,n}$ грунта. Присоединяя к этим силам силу $\vec{F}^{\,u}$ инерции груза и момент M^uпары сил инерции барабана лебедки, получаем уравновешенную систему сил.

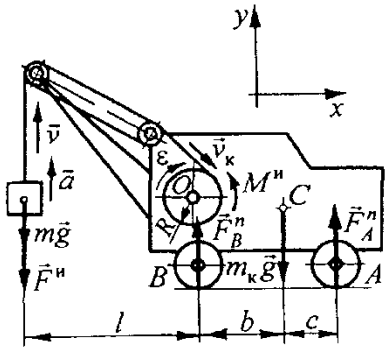


Рис. 25.2, б

Дифференцируя по времени заданную зависимость скорости навивки каната на барабан от скорости груза, находим зависимость ускорения $a_к$навивки каната от ускорения *a*груза: $a_к = ia$. Поскольку ускорение $a_к$равно тангенциальному ускорению

точки на внешней цилиндрической поверхности барабана, то угловое ускорение барабана $\varepsilon = a_к/R = ia/R$, а модуль момента пары сил инерции $|M^и| = J_O\varepsilon = J_O i a/R$.

Модуль силы инерции груза $|\bar{F}^и| = F^и = ma$.

Уравнения равновесия системы:

$$\sum Y_k = F_A^n + F_B^n - m_к g - mg - F^и = 0,$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = F^и l + mgl + |M^и| + F_A^n(b+c) - m_к gb = 0,$$

или

$$F_A^n + F_B^n - m_к g - mg - F^и = 0,$$

$$mal + mgl + J_O i a/R + F_A^n(b+c) - m_к gb = 0,$$

откуда

$$F_A^n = [m_к gb - m(a+g)l - J_O i a/R]/(b+c),$$

$$F_B^n = [m_к gc - m(a+g)(b+c+l) + J_O i a/R]/(b+c).$$

Ответ: $F_A^n = [m_к gb - m(a+g)l - J_O i a/R]/(b+c)$;

$F_B^n = [m_к gc - m(a+g)(b+c+l) + J_O i a/R]/(b+c)$.

Практическая работа №26
ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Виртуальным (возможным) перемещением $\delta\vec{r}$ *точки* называют любое воображаемое элементарное перемещение точки, допускаемое в данный момент времени связями, наложенными на эту точку.

Виртуальным перемещением механической системы называют любую совокупность воображаемых элементарных перемещений точек системы, допускаемых в данный момент времени наложенными на систему связями.

Виртуальную (возможную) работу силы $\vec{F}$ вычисляют по формулам

$$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = F\delta s\cos\alpha,$$

где X, Y, Z-проекции силы на оси координат; δx, δy, δz-вариации координат точки приложения силы, т.е. проекции виртуального перемещения $\delta \vec{r}$ этой точки; δs-модуль элементарного возможного перемещения $\delta \vec{r}$; α- угол между направлениями силы и возможного перемещения.

Если сила приложена к вращающемуся телу, то ее виртуальная работа

$$\delta A = M_z(F)\delta\varphi,$$

где $M_z(F)$- момент силы относительно оси zвращения тела;

$\delta\varphi$- элементарный угол поворота тела.

*Идеальными называют такие связи, сумма виртуальных работ реакций которых равна нулю на любом виртуальном перемещении системы.*К идеальным связям относят, например, абсолютно гладкую поверхность, гибкую нерастяжимую нить, шарниры без трения и др.; в абсолютно твердом теле связи между его точками идеальны.

Принцип виртуальных (возможных) перемещений, или принцип Лагранжа, состоит в том, что для равновесия механической системы, подчиненной идеальным стационарным (т.е. не изменяющимся со временем) связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма виртуальных работ всех действующих на нее активных сил была равна нулю при любом виртуальном перемещении системы из равновесного положения.

Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы с идеальными стационарными связями выражается уравнением

$$\sum \delta A_k^{\mathrm{a}} = \sum \delta F_k^{\mathrm{a}}\, \delta s_k \cos\alpha = 0.$$

Принцип виртуальных перемещений позволяет эффективно решать задачи статики, поскольку при идеальных связях можно исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей. Если же реакцию связи необходимо определить, то следует отбросить эту связь, заменив ее действие реакцией связи и относя вновь вводимую силу к числу активных сил, а также учитывая, что после удаления связи число степеней свободы увеличится.

26.1. Найти продольное усилие Sв стойке ABпризабойной крепи (рис. 26.1, а) под действием сил горного давления q_1=40 кН/м и q_2=20 кН/м с учетом силы тяжести G=6 кН, приложенной в точке C.

Решение. Продольное усилие в стойке крепи уравновешивается усилием S, создаваемым давлением масла в гидроцилиндре стойки (рис. 26.1,б). Применяя принцип Лагранжа для определения этого усилия, сообщаем штоку с поршнем виртуальное перемещение δl вдоль оси ABгидростойки. При этом полуарка AOповернется на угол $\delta\varphi_{AO}$, а стойка - на угол $\delta\varphi_{AB}$.

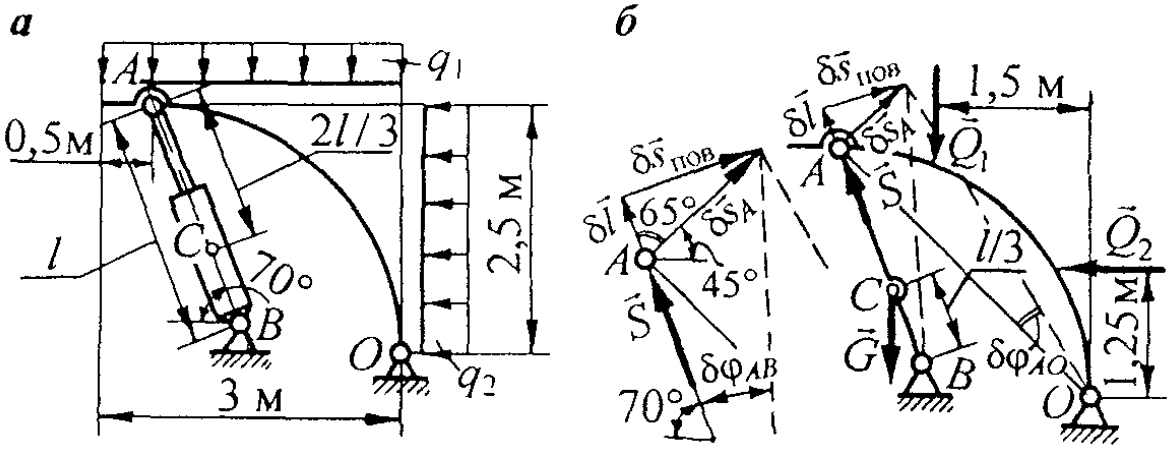


Рис. 26.1

Обозначаем через $\vec{\delta s}_{пов}$ перемещение точки A в результате поворота стойки на угол $\delta\varphi_{AB}$, а через δs_A- полное виртуальное перемещение этой точки при повороте полуарки на угол $\delta\varphi_{AO}$Из рис. 26.1, б видно, что

$$\delta s_{пов} = \delta l \operatorname{tg} 65°, \quad \text{а} \quad \delta s_A = \delta l / \cos 65°.$$

Тогда

$$\delta\varphi_{AO} = \delta s_A / l_{AO} = (\delta l \cos 45°)/(2{,}5 \cos 65°); \; \delta\varphi_{AB} = \delta s_{пов}/l =$$

$$=(\delta l \operatorname{tg} 65°)/l.$$

Распределение вертикальностью нагрузки интенсивностью q_1заменяем сосредоточенной силой Q_1, линия действия которой проходит посредине горизонтального габарита крепи, а модуль $Q_1 = q_1 \cdot 3 = 40 \cdot 3 = 120$ кН. Поступая аналогично с распределенной нагрузкой q_2, получаем силу Q_2, ее модуль $Q_2 = q_2 \cdot 2{,}5 = 20 \cdot 2{,}5 = 50$ кН.

Теперь составляем уравнение для данной системы, вычисляя работу каждой из сил G, Q_1и Q_2как произведение момента этой силы относительно центра вращения соответствующего звена на угол его поворота, и учитывая, что работа силы отрицательна, если направление ее момента относительно центра вращения звена, к которому эта сила приложена, противоположно направлению его поворота:

$$S\,\delta l - (G\, l_{CB} \cos 70°)\,\delta\varphi_{AB} - (Q_1 \cdot 1{,}5)\,\delta\varphi_{AO} - (Q_2 \cdot 1{,}25)\,\delta\varphi_{AO} = 0,$$

или

$$S - (G \cos 70° \operatorname{tg} 65°)/3 -$$

$$- [(1{,}5Q_1 + 1{,}25Q_2) \cos 45°]/(2{,}5 \cos 65°) = 0,$$

откуда

$$S = (6 \cos 70° \operatorname{tg} 65°)/3 +$$

$$+ [(1{,}5 \cdot 120 + 1{,}25 \cdot 50) \cos 135°]/(2{,}5 \cos 65°) = 163{,}76 \text{ кН}.$$

Ответ: $S = 163{,}76$ кН.

26.2. Арочная крепь (рис. 26.2, а) находится под действием вертикального горного давления q_1=80 кН/м. Определить интенсивность q_2отпора боковых горных пород.

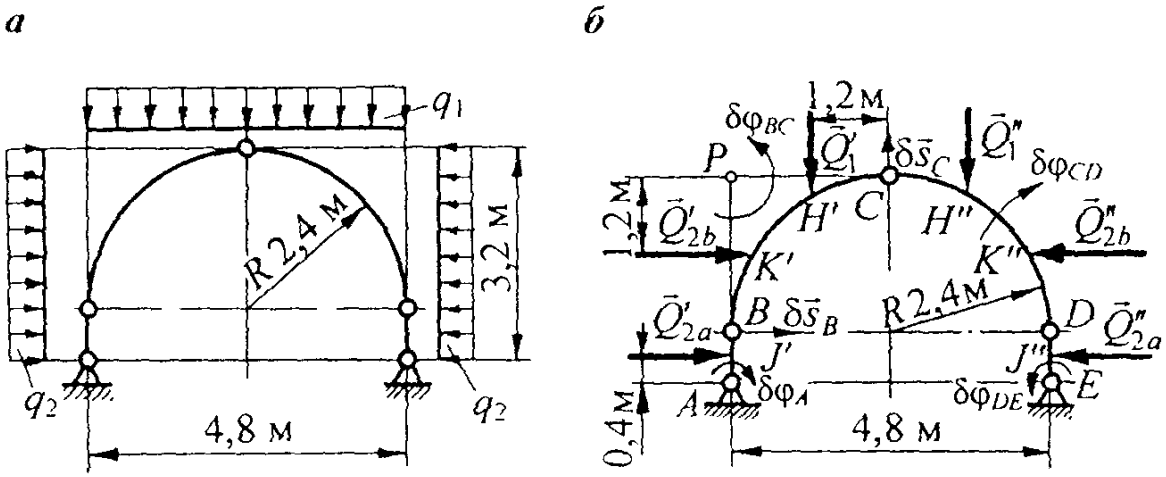


Рис. 26.2

Решение. Составляя расчетную схему системы (рис. 26.2, б), заменяем действующую на полуарки и боковые стойки распределенную нагрузку q_1и q_2сосредоточенными силами $\vec{Q}'_1$, $\vec{Q}''_1$, $\vec{Q}'_{2a}$, $\vec{Q}'_{2b}$, $\vec{Q}''_{2a}$ и $\vec{Q}''_{2b}$, линии действия, которых проходят через середины соответствующих участков, поэтому точками их приложения оказываются соответственно точки *H′, H″, J′, J″, K′* и*K″.*

Модули этих сил:

$$Q'_1 = Q''_1 = q_1\ 2{,}4 = 80\ \ 2{,}4 = 192 \text{ кН},$$

$$Q'_{2a} = Q''_{2a} = q_2\,(3{,}2 - 2{,}4) = 0{,}8\,q_2, \quad Q'_{2b} = Q''_{2b} = 2{,}4\,q_2.$$

Сообщаем теперь шарниру *C* возможное вертикальное перемещение $\vec{\delta s}_C$. Тогда стойка *AB*поворачивается на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_A$так, что шарнир *B*получает возможное перемещение$\vec{\delta s}_B$, направленное по касательной к дуге окружности, описываемой точкой *B*, т.е. вправо, перпендикулярно к *AB*.

Полуарка *BC*совершает поворот на элементарный угол $\delta\varphi_{BC}$вокруг мгновенного центра *P* находящегося на пересечении перпендикуляров, восставленных к векторам δs_B и δs_C, причем

$$\delta\varphi_{BC} = \delta s_C / l_{PC} = \delta s_C / R, \text{ а } \delta s_B = \delta\varphi_{BC}\, l_{PB} = \delta\varphi_{BC}\, R = \delta s_C .$$

Так как точка *B*принадлежит одновременно полуарке *BC*и стойке *AB*, то угол поворота стойки $\delta\varphi_B = \delta s_B/l_{AB} = \delta s_C/l_{AB}$

В силу симметрии арочной крепи получаем для правой ее половины аналогичные соотношения, но направления поворота полуарки *CD*и стойки *DE*, а также направление вектора δs_Dвозможного перемещения точки *D*противоположны соответственно направлениям поворота полуарки *BC*, стойки *AB*и направлению вектора δs_B.

На основании принципа возможных перемещений имеем

$$\sum \delta A_k = \delta A_{Q'_1} + \delta A_{Q'_{2a}} + \delta A_{Q'_{2b}} + \delta A_{Q''_1} + \delta A_{Q''_{2a}} + \delta A_{Q''_{2b}} = 0.$$

Вычисляем работу каждой из сил как произведение момента этой силы относительно центра вращения соответствующего звена на угол его поворота:

$$\delta A_{Q_1'} = \delta A_{Q_1''} = -\,Q_1' \cdot 1{,}2\,\delta\varphi_P = -\,Q_1' \cdot 1{,}2\,\delta s_C / R =$$
$$= -\,192 \cdot 1{,}2\,\delta s_C / 2{,}4 = -\,96\,\delta s_C\,^*,$$
$$\delta A_{Q_{2a}'} = \delta A_{Q_{2a}''} = Q_{2a}' \cdot 0{,}4\,\delta\varphi_A = Q_{2a}' \cdot 0{,}4\,\delta s_C / l_{AB} =$$
$$= 0{,}8\,q_2 \cdot 0{,}4\,\delta s_C / 0{,}8 = 0{,}4 q_2\,\delta s_C,$$
$$\delta A_{Q_{2b}'} = \delta A_{Q_{2b}''} = Q_{2b}' \cdot 1{,}2\,\delta\varphi_P = Q_{2b}' \cdot 1{,}2\,\delta s_C / R =$$
$$= 2{,}4\,q_2 \cdot 1{,}2\,\delta s_C / 2{,}4 = 1{,}2 q_2\,\delta s_C.$$

Следовательно, уравнение получает вид

$$-\,96\,\delta s_C + 0{,}4 q_2\,\delta s_C + 1{,}2 q_2\,\delta s_C - 96\,\delta s_C + 0{,}4 q_2\,\delta s_C + 1{,}2 q_2\,\delta s_C = 0,$$

откуда

$$3{,}2 q_2 = 192, \text{ или } q_2 = 60 \text{ кН}.$$

Ответ: $q_2 = 60$ кН/м.

26.3. Определить реакции в шарнирах *A*и *B*трапециевидной крепи под действием горного давления *F*=200 *кН* и *Q*=Q'=160 *кН* (рис. 26.3,а).

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы и удерживается в равновесии в силу симметрии конструкции и нагрузки.

Чтобы найти горизонтальную составляющую X_Bреакции В, нужно шарнирно-неподвижную опору заменить опорой на катках, опирающихся на горизонтальную плоскость, и к этой подвижной опоре приложить внешнюю нагрузку X_B, удерживающую систему в заданном положении (рис. 26.3, б).

а *б*

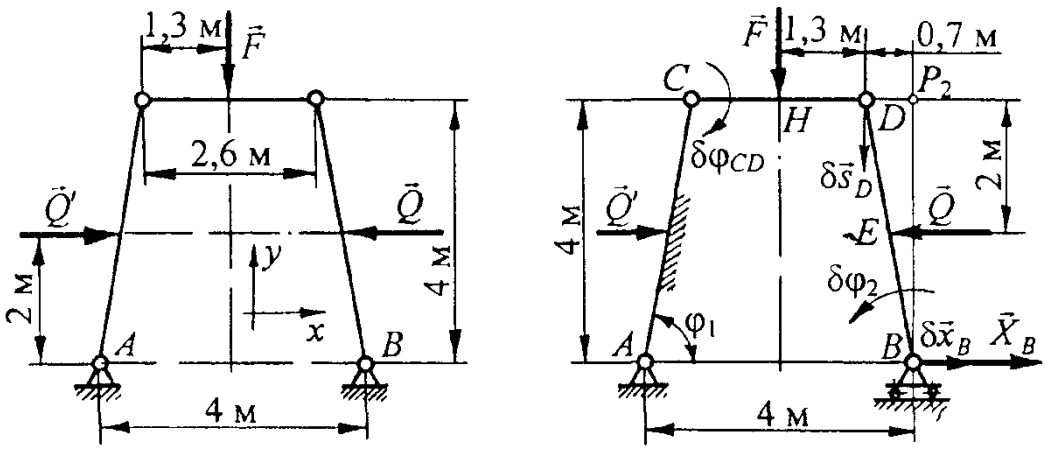


Рис. 26.3

Сообщим теперь системе, имеющей после этой замены две степени свободы, такое возможное перемещение, при котором точка *B*получит виртуальное перемещение δx_B, а боковая стойка *AC*останется неподвижной, при этом угол*CAB*-φ_1=*const,* а его вариация $\delta\varphi_1=0$. В результате звено *CD*повернется вокруг неподвижной точки *C*на некоторый угол $\delta\varphi_{CД}$, точка *D*получит виртуальное перемещение δs_D, а боковая стойка *BD*совершит поворот на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_2$ вокруг мгновенного центра P_2, находящегося на пересечении перпендикуляров, восставленных к векторам δx_Bи δs_D, причем

$$\delta\varphi_2 = \delta x_B / l_{P_2 B} = \delta x_B / 4, \text{ а } \delta s_D = \delta\varphi_2\, l_{P_2 D} = 0{,}7\,\delta x_B / 4.$$

Поскольку

$$\delta\varphi_{CD} = \delta s_D / l_{CD}, \quad \text{то} \quad \delta s_H = \delta\varphi_{CD} l_{CH} = \delta s_D \, l_{CH} / l_{CD} = 0{,}7\,\delta x_B / 8.$$

На основании принципа возможных перемещений имеем

$$\sum \delta A_k = \delta A_{X_B} + \delta A_{Q'} + \delta A_F = 0.$$

Работу силы Qнаходим как произведение момента этой силы относительно мгновенного центра P_2вращения стойки BDна угол $\delta\varphi_2$ ее поворота учитывая, что направление момента противоположно направлению поворота.

Тогда

$$\sum \delta A_k = X_B\,\delta x_B - (Q\ 2)\,\delta\varphi_2 + F\,\delta s_H =$$

$$= X_B\,\delta x_B - Q\,\delta x_B / 2 + F\ 0{,}7\,\delta x_B / 8 = 0,$$

откуда

$$X_B = Q / 2 - F\ 0{,}7 / 8 = 160 / 2 - 200\ 0{,}7 / 8 = 62{,}5 \text{ кН}.$$

Чтобы найти вертикальную составляющую Y_Bреакции шарнира B, шарнирно-неподвижную опору заменяем опорой на катках, опирающихся на вертикальную плоскость, и к этой подвижной опоре прикладываем внешнюю нагрузку Y_B, удерживающую систему в заданном положении (рис. 26.3)

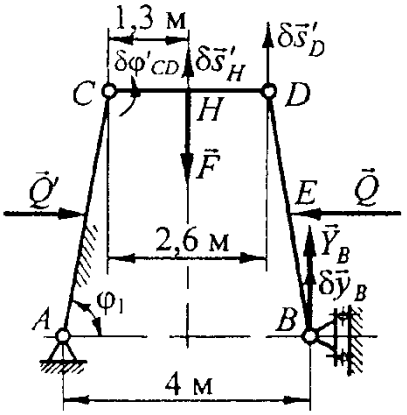


Рис. 26.3, б

Сообщаем теперь системе, имеющей после этой замены две степени свободы, такое возможное перемещение, при котором точка Bполучает виртуальное перемещение δy_B, а боковая стойка ACпо-прежнему остается неподвижной, следовательно, $CAB=\varphi_1=const$, а его вариация $\delta\varphi_1=0$. В результате звено CDповорачивается вокруг неподвижной точки Cна некоторый угол $\delta\varphi'_{CD}$, точка Dполучает вертикальное виртуальное перемещение $\delta s'_D$, а боковая стойка BDсовершает поступательное движение, поскольку мгновенный центр P'_2ее вращения находится в бесконечности.

Следовательно,

$$\delta s'_D = \delta y_B, \quad \delta s'_H = \delta s'_D / 2 = \delta y_B / 2.$$

Работа силы Qпри таком виртуальном перемещении системы равна нулю, потому что виртуальное перемещение точки Eприложения этой силы перпендикулярно линии действия силы.

Тогда

$$\sum \delta A_k = Y_B\,\delta y_B - F\delta s'_H = Y_B\,\delta y_B - F\delta y_B/2 = 0,$$

Откуда

$$Y_B = F/2 = 200/2 = 100 \text{ кН}.$$

Поскольку заданная система симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку приложения силы F, то и реакции шарниров A и Bдолжны быть симметричны, т.е.

$$X_A = -X_B = -62{,}5 \text{ кН}, \qquad Y_A = Y_B = 100 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -X_B = -62{,}5$ кН; $Y_A = Y_B = 100$ кН.

Практическая работа №27
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕУРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯСИСТЕМЫ ВОБОБЩЕННЫХКООРДИНАТАХ

Обобщенными координатами называют любые независимые друг от друга параметры, которые однозначно определяют положение точек механической системы в пространстве.

Число независимых между собой вариаций координат точек системы называют числом степеней свободы системы.

Связи, налагающие ограничения на координаты точек системы, называют *геометрическими*, а налагающие ограничения еще и на скорости (т.е. на первые производные от координат по времени), -*кинематическими*, или *дифференциальными.*

Если дифференциальную связь можно представить как геометрическую, т.е. установленную этой связью зависимость между скоростями свести к зависимости между координатами, то такую связь называют *интегрируемой*.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи объединяют в общую группу голономных связей, а механические системы с голономными связями также называют *голономными.*

*Уравнения Лагранжа второго рода*представляют собой дифференциальные уравнения движения голономной механической системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1, ..., k,$$

где T-кинетическая энергия системы;

q_j-обобщенные координаты;

$\dot{q}_j$- обобщенные скорости;

Q-обобщенные силы; t-время; k-число степеней свободы системы.

Переменные q_j, $\dot{q}_j$и tназывают лагранжевыми переменными.

Способы вычисления обобщенных сил:

а)по формуле

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j=1, ..., k,$$

где F_i-сила, действующая на систему; n-радиус - вектор точки приложения силы; n-число точек; i=1, ..., n;

б) как коэффициенты при вариациях соответствующих обобщенных координат в выражении суммарной виртуальной работы сил, действующих на систему:

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{k}Q_j\,\delta q_j=$$

$$=Q_1\,\delta q_1+...+Q_j\,\delta q_j+...+Q_k\,\delta q_k;$$

в) как коэффициент при вариации 5s одной изменяемой обобщенной координаты $q_j \neq const$в выражении суммарной виртуальной работы при неизменных остальных обобщенных координатах:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{(j)} / \delta q_j, \quad j = 1, ..., k;$$

г) для потенциальных сил

$$Q_j = -\frac{\partial П}{\partial q_j}, \quad j = 1, ..., k,$$

где *П*-потенциальная энергия системы;

г) для диссипативных сил

$$Q_j = -\frac{\partial Ф}{\partial q_j}, \quad j = 1, ..., k,$$

где *Ф*- диссипативная функция системы.

Существуют и другие дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, эквивалентные уравнениям Лагранжа второго рода. В частности, это *уравнения Нильсена*

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, ..., k$$

и уравнения *Аппеля*

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, ..., k,$$

где $S = 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} m_i a_i^2$ -*энергия ускорений*, или *функция Аппеля*.

При поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении твердого тела функцию Аппеля вычисляют соответственно по следующим формулам:

$$S_{пост} = 0{,}5ma^2;$$

$$S_{вр} = 0{,}5J_z(\varepsilon^2 + \omega^4);$$

$$S_{пл} = 0{,}5[ma_C^2 + J_C(\varepsilon^2 + \omega^4)],$$

где m- масса тела; J_z-момент инерции тела относительно оси вращения;

J_c-момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения; a - ускорение тела; a_C-ускорение центра масс тела; ω и ε-угловая скорость и угловое ускорение тела.

При решении задач в выражении для функции Аппеля обычно оставляют только те слагаемые, которые содержат обобщенные ускорения, поскольку только эти слагаемые дают не равные нулю производные, входящие в левые части уравнений Аппеля.

Уравнения Аппеля можно использовать для анализа движения как голономных, так и неголономных систем.

27.1. К ведущим звездочкам *1* гусеничного хода роторного экскаватора (рис. 27.1, а) приложен вращающий момент M_1, а к барабану *5* лебедки подъема стрелы - момент M_5. Известны также радиус R_1звездочки; масса m_3 ротора, рассматриваемого как материальная точка; масса m_2стрелы, представленной сплошным однородным стержнем длиной $2l$; масса m_4 машины (без стрелы и ротора); момент M_cсил сопротивлений; радиус R_5барабана; l_{OA}-l_{OD}.Составить дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат принимаем угловые перемещения φ_1 и φ_2соответственно

звездочки и стрелы, поэтому на основании движение системы определяем двумя следующими уравнениями Лагранжа второго рода:

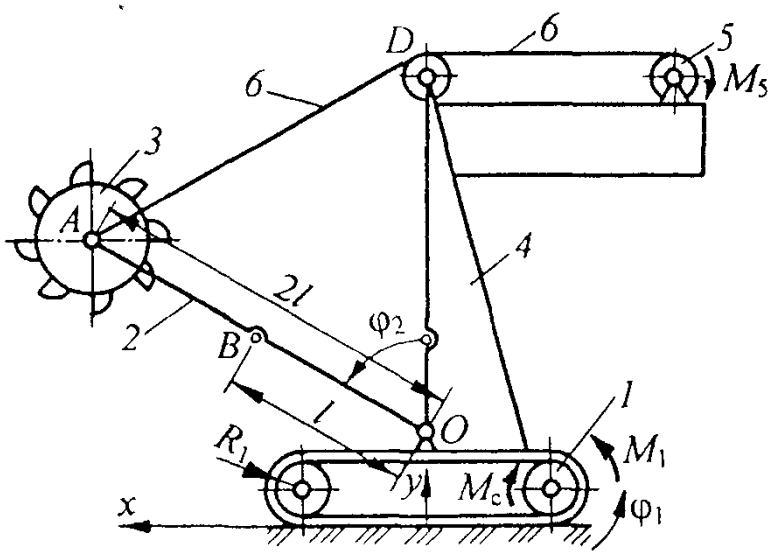


Рис. 27.1, а

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=Q_1,\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=Q_1.\end{aligned}\right\}$$

Кинетическую энергию системы вычисляем, учитывая, что ротор *3*считается материальной точкой, стрела *2*совершает

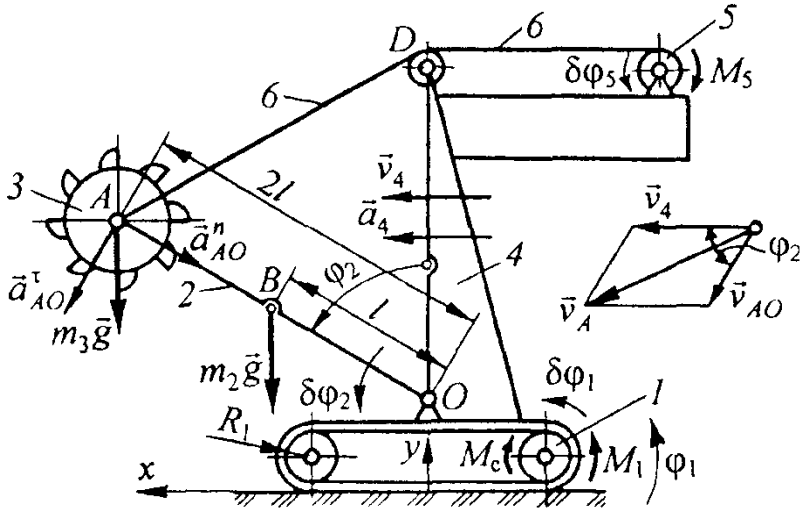


Рис. 22.1, б

плоскопараллельное движение, а корпус *4*экскаватора - поступательное (рис. 27.1, б):

$$T = 0{,}5(m_3 v_A^{\,2} + \ m_2 v_B^{\,2} + J_B \omega_2^{\,2} + m_4 v_4^{\,2}),$$

где v_A- скорость центра *A*ротора;

v_B- скорость центра масс *B*стрелы;

J_B-момент инерции стрелы относительно ее центральной оси *B*; поскольку стрела считается сплошным однородным стержнем, то $J_B=m_2(2l)^2/l_2=m_2l^2/3$;

ω_2-угловая скорость стрелы;

v_4- скорость корпуса экскаватора, $v_4 = \omega_1 R_1$;

ω_1- угловая скорость ведущей звездочки.

Скорости точек и звеньев машины выражаем через обобщенные координаты φ_1 и φ_2 и обобщенные скорости $\varphi_1=\omega_1$ и $\varphi_2=\omega_2$.

Скорость v_Aцентра Aротора геометрически складывается из скорости v_0принятого за полюс шарнира O, равной скорости v_4корпуса экскаватора, и скорости v_{AO}, которую точка Aполучает при вращении стрелы вокруг полюса:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} = \vec{v}_4 + \vec{v}_{AO}.$$

Модуль и направление скорости v_Aопределяем, построив параллелограмм на векторах v_4иv_{AO}.Учитывая, что $v_{AO}=\omega_1 l_{AO}=2\varphi_1 l$, получаем

$$v_A^2 = v_4^2 + v_{AO}^2 + 2v_4 v_{AO}\cos\varphi_2 =$$
$$= (\omega_1 R_1)^2 + (2\dot{\varphi}_2 l)^2 + 2(\omega_1 R_1)(2\dot{\varphi}_2 l)\cos\varphi_2 =$$
$$= \dot{\varphi}_1^2 R_1^2 + 4\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 4lR_1\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2.$$

По аналогии для точки Bимеем

$$v_B^2 = v_4^2 + v_{BO}^2 + 2v_4 v_{BO}\cos\varphi_2 =$$
$$= (\omega_1 R_1)^2 + (\dot{\varphi}_2 l)^2 + 2(\omega_1 R_1)(\dot{\varphi}_2 l)\cos\varphi_2 =$$
$$= \dot{\varphi}_1^2 R_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2lR_1\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2.$$

Подставляя полученные выражения в уравнениеи обозначая массу всей системы через $m=m_2+m_3+m_4$, находим

$$T = 0{,}5mR_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2(m_3 + m_2/3)l^2\dot{\varphi}_2^2 + (2m_3 + m_2)lR_1\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2.$$

Теперь можно вычислить производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = mR_1^2\dot{\varphi}_1 + (2m_3 + m_2)lR_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = mR_1^2\ddot{\varphi}_1 + (2m_3 + m_2)lR_1(\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = 4(m_3 + m_2/3)l^2\dot{\varphi}_2 + (2m_3 + m_2)lR_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = 4(m_3 + m_2/3)l^2\ddot{\varphi}_2 +$$
$$+ (2m_3 + m_2)lR_1(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = -2(m_3 + m_2)lR_1\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2.$$

Далее необходимо определить обобщенные силы Q_1и Q_2, каждую из которых находим по формуле как коэффициент при вариации δq_jодной изменяемой обобщенной координаты $q_j\neq$constв выражении суммарной виртуальной работы при

неизменных остальных обобщенных координатах.

Сообщаем рассматриваемой механической системе виртуальное перемещение $\delta\varphi_1>0$ при $\varphi_2=const$. Тогда

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{(\varphi_1)} / \delta\varphi_1 = (M_1\delta\varphi_1 - M_c\delta\varphi_1)/\delta\varphi_1 = M_1 - M_c .$$

Затем сообщаем системе виртуальное перемещение $\delta\varphi_2>0$ при $\varphi_1=const$. Заметим, что в этом случае точка Aполучает перемещение $\delta s_A=21\delta\varphi_2$, а точка B-перемещение $\delta s=l\delta\varphi_2$, причем δs_AперпендикуляренOAиδs_BперпендикуляренOB. Для определения зависимости элементарного угла $\delta\varphi_5$ поворота барабана 5от углового перемещения $\delta\varphi_2$ выразим переменную длину Lучастка ADканата 6через угол φ_2. Из равнобедренного треугольника AOD, в котором $AO=OD=2l$, находим $L=4lsin(\varphi_2/2)$. Варьируя L, получаем $\delta L=2l(\delta\varphi_2)cos(\varphi_2/2)$. С другой стороны,$\delta L=R_5(\delta\varphi_5)$. Следовательно, $\delta\varphi_5=(2l/R_5)\delta\varphi_2cos(\varphi_2/2)$.

Суммарная виртуальная работа сил, действующих на данную систему, при виртуальном перемещении $\delta\varphi_2>0$ и $\varphi_1=const$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{(\varphi_2)} = m_3 g\ \delta s_A \sin\varphi_2 + m_2 g\ \delta s_B \sin\varphi_2 - M_5\,\delta\varphi_5 =$$
$$= l\left[(2m_3 + m_2)\, g \sin\varphi_2 - (2M_5/R_5)\cos(\varphi_2/2)\right]\delta\varphi_2 .$$

Искомая обобщенная сила

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{(\varphi_2)} / \delta\varphi_2 = l\left[(2m_3 + m_2)\, g \sin\varphi_2 - (2M_5/R_5)\cos(\varphi_2/2)\right].$$

Подставляя найденные выражения для обобщенных сил и производных в уравнения (1), получаем дифференциальные уравнения движения системы:

$$mR_1^2\ddot{\varphi}_1 + (2m_3 + m_2)lR_1(\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2) = M_1 - M_c ;$$

$$4(m_3 + m_2/3)l^2\ddot{\varphi}_2 + (2m_3 + m_2)lR_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2 =$$
$$= l\left[(2m_3 + m_2)\, g \sin\varphi_2 - (2M_5/R_5)\cos(\varphi_2/2)\right].$$

Эти же уравнения можно получить, используя уравнения Нильсена

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}_1} - 2\frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}_2} - 2\frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = Q_2$$

или уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}_1} = Q_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}_2} = Q_2 ,$$

где S-функция Аппеля; φ_1 иφ_2- обобщенные ускорения.

Для рассматриваемой системы, в которой стрела 2 совершает плоскопараллельное движение, а корпус 4 - поступательное, в соответствии с формулами, энергия ускорений

$$S = 0{,}5[m_3 a_A^2 + m_2 a_B^2 + J_B(\varepsilon_2^2 + \omega_2^4) + m_4 a_4^2],$$

где a_A, a_Bи a_4- соответственно ускорение центра Aротора, ускорение центра Bмасс стрелы и ускорение корпуса экскаватора, причем

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^{\,n} + \vec{a}_{AO}^{\,\tau}, \qquad (4$$

$$a_O = a_4 = \varepsilon_1 R_1 = \ddot{\varphi}_1 R_1, \quad a_{AO}^n = \omega_2^2 l_{OA} = 2l\dot{\varphi}_2^2, \quad a_{AO}^\tau = \varepsilon_2 l_{OA} = 2l\ddot{\varphi}.$$

Проецируем равенство на координатные оси:

$$\ddot{x}_A = a_O - a_{AO}^n \sin\varphi_2 + a_{AO}^\tau \cos\varphi_2 = \ddot{\varphi}_1 R_1 - 2l\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2 + 2l\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2,$$

$$\ddot{y}_A = -a_{AO}^n \cos\varphi_2 - a_{AO}^\tau \sin\varphi_2 = -2l\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2 - 2l\ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2.$$

Тогда

$$a_A^2 = \ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2 = \ddot{\varphi}_1^2 R_1^2 + 4l^2(\ddot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2^4) + 4lR_1\ddot{\varphi}_1(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2).$$

По аналогии

$$a_B^2 = \ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2 = \ddot{\varphi}_1^2 R_1^2 + l^2(\ddot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2^4) + 2lR_1\ddot{\varphi}_1(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2).$$

Подставляя найденные значения ускорений в формулу, получаем

$$S = 0{,}5mR_1^2\ddot{\varphi}_1^2 + 2(m_4 + m_2/3)l^2(\ddot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2^4) +$$
$$+ (2m_3 + m_2)lR_1\ddot{\varphi}_1(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2).$$

Частные производные, представляющие собой левые части уравнений Аппеля:

$$\partial S/\partial\ddot{\varphi}_1 = mR_1^2\ddot{\varphi}_1 + (2m_3 + m_2)lR_1(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2),$$

$$\partial S/\partial\ddot{\varphi}_2 = 4(m_4 + m_2/3)l^2\ddot{\varphi}_2 + (2m_3 + m_2)lR_1\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_2.$$

Приравнивая эти производные соответствующим обобщенным силам, получаем дифференциальные уравнения движения системы, совершенно аналогичные найденным ранее с помощью уравнений Лагранжа.

Ответ:

$$mR_1^2\ddot{\varphi}_1 + (2m_3 + m_2)lR_1(\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2) = M_1 - M_c;$$

$$4(m_3 + m_2/3)l^2\ddot{\varphi}_2 + (2m_3 + m_2)lR_1\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_2 =$$
$$= l\left[(2m_3 + m_2)g \sin\varphi_2 - (2M_5/R_5)\cos(\varphi_2/2)\right].$$

27.2. В трансмиссии шахтного гировоза имеется муфта, со стоящая из двух полумуфт *A*и *B*(рис. 27.2). Полумуфта *A*связана с маховиком *l*передачей с передаточным отношением i_1, а полумуфта *B*- с колесами 2 передачей с передаточным отношением i_2. В процессе разгона гировоза полумуфты проскальзывают одна относительно другой и за счет трения передают постоянный предельный крутящий момент *M*. Составить уравнения движения гировоза на этом этапе, принимая за обобщенные координаты угол φ поворота маховика и координату *s* кузова, и определить момент времени *t* окончания относительного проскальзывания полумуфт. Известны: начальная угловая скорость маховика ω_o; общая масса *m*гировоза; момент инерции J_1маховика; момент инерции J_2колесной пары; радиус *R*колеса. Гировоз движется по горизонтальному пути, его начальная скорость равна нулю. Проскальзыванием колее и вредными сопротивлениями пренебречь.

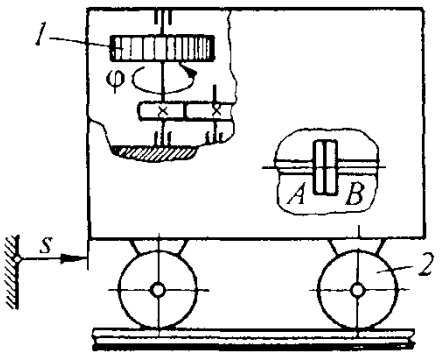


Рис. 27.2

Решение. Уравнение вращательного движения маховика можно получить на основании формулы, приведенной в начале гл., учитывая, что внешней нагрузкой, действующей на вал маховика при движении гировоза, является не вращающий момент сил сопротивления $M_c=-M/i_1$, где i_1-перечное отношение участка трансмиссии от вала маховика до полумуфтыA, к которой и приложен момент M. Следовательно.

$$J_1\ddot{\varphi} = -M/i_1,$$

$$T = 0{,}5[m_{куз}\dot{s}^2 + 2(m_2\dot{s}^2 + J_2\omega_2^2)] = 0{,}5[m + 2J_2/R^2]\dot{s}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = (m + 2J_2/R^2)\ddot{s}, \qquad \frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

$$Q_s = \delta A^{(s)}/\delta s = M_к \delta\varphi_2/\delta s = Mi_2/R,$$

$$(m + 2J_2/R^2)\ddot{s} = Mi_2/R,$$

Уравнения являются дифференциальными уравнениями движения гировоза на этапе разгона.

Относительное проскальзывание полумуфт отсутствует, если равны их угловые скорости, т.е. если $\varphi/i_1=(s/R)i_2$, или

$$\dot{\varphi} = \dot{s}\, i_1 i_2 / R.$$

Из уравнения (1) имеем $\varphi=-M/(i_1J_1)$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_{\omega_0}^{\varphi} d\dot{\varphi} = -M/(i_1J_1)\int_0^t dt, \qquad \dot{\varphi} - \omega_0 = -Mt/(i_1J_1),$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - Mt/(i_1J_1).$$

Из уравнения находим

$$\ddot{s} = MRi_2/(mR^2 + 2J_2).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_0^{\dot{s}} d\dot{s} = [MRi_2/(mR^2 + 2J_2)]\int_0^t dt, \qquad \dot{s} = [MRi_2/(mR^2 + 2J_2)]t.$$

Подставляем полученные значения φ и sв уравнение:

$$\omega_0 - Mt/(i_1J_1) = [MR\, i_2/(mR^2 + 2J_2)]\, t,$$

откуда

$$t = J_1 i_1 \omega_0 (mR^2 + 2J_2) / [M(mR^2 + 2J_2 + J_1 i_1^2 i_2^2)].$$

Ответ: $J_1 \ddot{\varphi} = -M/i_1$; $(mR^2 + 2J_2)\ddot{s} = MRi_2$;

$$t = J_1 i_1 \omega_0 (mR^2 + 2J_2) / [M(mR^2 + 2J_2 + J_1 i_1^2 i_2^2)].$$

27.3. В механизме дифференциальной центробежной мельницы двигатель *l* с помощью ременной передачи вращает вокруг вертикальной оси O_2водило *2*, несущее оси двух барабанов *3*(рис. 27.3). Солнечное колесо*4*через шестерни *5*, *5'*и *3*, *3'*сообщает барабанам вращение относительно водила. Известны: моменты инерции J_1, J_2, J_3, J_4, соответственно ротора двигателя со шкивом, водила, барабана и солнечного колеса относительно вертикальных осей вращения O_1,O_2, O_3, O_4; масса барабана m_3, передаточное отношение ременной передачи i_1; радиус *R*; отношение чисел зубьев $z_4/z_3=i_2$радиус *R*; крутящие моменты M_1 (на валу двигателя) и M_4. (на солнечном колесе). Силы сопротивления вращению барабанов приводятся к силам *F*, приложенным к осям барабанов, и к парам сил с моментом M_3. Составить уравнения Лагранжа, принимая за обобщенные координаты угол φ_1 поворота ротора двигателя и угол φ_4 поворота солнечного колеса 4.

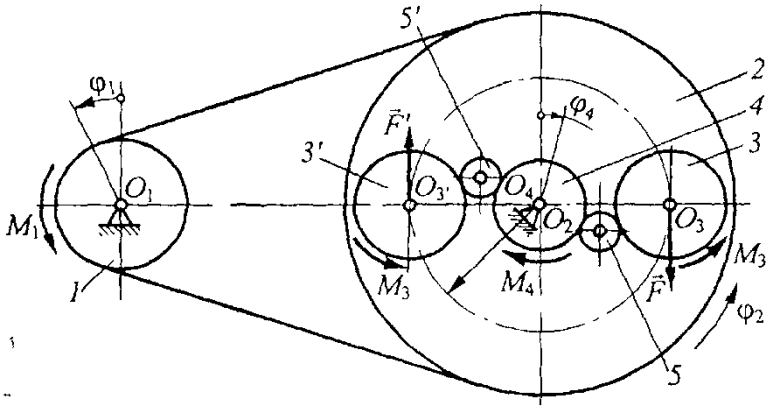


Рис. 27.3

Решение. Кинетическая энергия *T*системы складывается из кинетической энергии T_1ротора двигателя со шкивом, кинетической энергии T_2водила, кинетической энергии T_3 двух барабанов и кинетической энергии T_4, солнечного колеса. Массой, а, следовательно, и кинетической энергией сателлитов *5*пренебрегаем.

Угловые скорости ротора, водила и солнечного колеса обозначаем соответственно через φ_1,ω_2 и φ_4, причем$\omega_2=\varphi_1/i_1$.

Скорость центра барабана $v_3=\omega_2 R=\varphi_1 R/i_1$.

Угловую скорость ω_3барабана находим, применяя метод Виллиса. Направление вращения водила считаем положительным, а солнечного колеса - отрицательным, тогда

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{-\dot{\varphi}_4 - \omega_2} = \frac{z_4}{z_3} = i_2, \quad \omega_3 = -\dot{\varphi}_4 i_2 + \omega_2(1 - i_2) = -\dot{\varphi}_4 i_2 + \dot{\varphi}_1(1 - i_2)/i_1.$$

Определяем значения T_1, T_2,T_3иT_4.

$$T_1 = 0{,}5 J_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad T_2 = 0{,}5 J_2 \omega_2^2 = 0{,}5 J_2 \dot{\varphi}_1^2 / i_1^2, \quad T_3 = 2 \cdot 0{,}5(m_3 v_3^2 + J_3 \omega_3^2) =$$

$$= m_3 \dot{\varphi}_1^2 R^2 / i_1^2 + J_3[-\dot{\varphi}_4 i_2 + \dot{\varphi}_1(1 - i_2)/i_1]^2, \quad T_4 = 0{,}5 J_4 \dot{\varphi}_4^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = 0{,}5\{[J_1 + (J_2 + 2m_3R^2)/i_1^2]\dot{\varphi}_1^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2\} + J_3[-\dot{\varphi}_4 i_2 + \dot{\varphi}_1(1-i_2)/i_1]^2.$$

Находим производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = [J_1 + (J_2 + 2m_3R^2)/i_1^2]\ddot{\varphi}_1 +$$

$$+ 2J_3[-\ddot{\varphi}_4 i_1 i_2 + \ddot{\varphi}_1(1-i_2)](1-i_2)/i_1^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4}\right) = (2J_3 i_2 + J_4)\ddot{\varphi}_4 - 2J_3\ddot{\varphi}_1(1-i_2)i_2/i_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = 0.$$

Вычисляем обобщенную силу Q_1, сообщая системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta\varphi_1 \neq 0;\ \varphi_4 = const;\ \delta\varphi_4 = 0;\ \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1/i_1;\ \delta\varphi_3 = \delta\varphi_1(1-i_2)/i_1$:

$$Q_1 = \sum \delta A_i^{(\varphi_1)}/\delta\varphi_1 = M_1\delta\varphi_1 - 2FR\,\delta\varphi_2 + 2M_3\delta\varphi_3 =$$

$$= M_1 - 2FR/i_1 + 2M_3(1-i_2)/i_1.$$

Вычисляем обобщенную силу Q_2, сообщая системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta\varphi_4 \neq 0;\ \varphi_1 = const;\ \delta\varphi_1 = 0;\ \delta\varphi_2 = 0;\ \delta\varphi_3 = \delta\varphi_4 i_2$

$$Q_4 = \sum \delta A_i^{(\varphi_4)}/\delta\varphi_4 = (M_4\delta\varphi_4 - 2M_3\delta\varphi_3)/\delta\varphi_4 = M_4 - 2M_3 i_2.$$

Подставляя полученные значения производных и обобщенных сил в уравнения Лагранжа, получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\{J_1 + [J_2 + 2m_3R^2 + 2J_3(1-i_2)^2]/i_1^2\}\ddot{\varphi}_1 -$$

$$- 2J_3(1-i_2)i_2\ddot{\varphi}_4/i_1 = M_1 - 2[FR_1 - M_3(1-i_2)]/i_1,$$

$$2J_3 i_2[i_2\ddot{\varphi}_4 - (1-i_2)\ddot{\varphi}_1/i_1] + J_4\ddot{\varphi}_4 = M_4 - 2M_3 i_2.$$

Ответ: $\{J_1 + [J_2 + 2m_3R^2 + 2J_3(1-i_2)^2]/i_1^2\}\ddot{\varphi}_1 -$

$$- 2J_3(1-i_2)i_2\ddot{\varphi}_4/i_1 = M_1 - 2[FR_1 - M_3(1-i_2)]/i_1;$$

$$2J_3 i_2[i_2\ddot{\varphi}_4 - (1-i_2)\ddot{\varphi}_1/i_1] + J_4\ddot{\varphi}_4 = M_4 - 2M_3 i_2.$$

27.4. Вагонетка массой *m*, прикрепленная к канату лебедки *2*, движется равномерно вниз по уклону (рис. 27.4). При торможении к барабану лебедки прикладывается тормозящий момент *M*. Известны: момент инерции *J*относительно оси вращения и радиус *R*барабана, жесткость с каната и угол а. Составить уравнения Лагранжа, принимая за обобщенные координаты угол φ поворота барабана и перемещение *x*вагонетки по наклонной плоскости. Начало отсчета соответствует положению системы в момент приложения тормозящего момента.

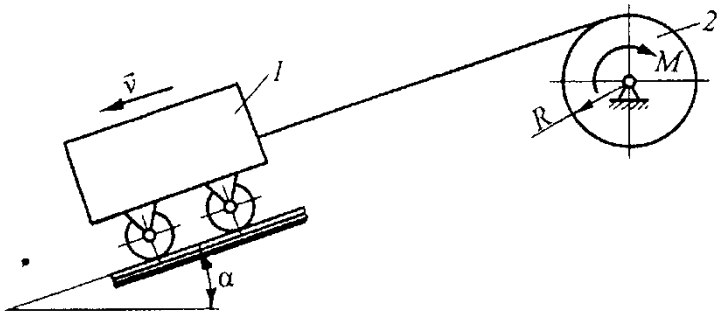


Рис. 27.4

Решение. Кинетическая энергия T системы складывается из кинетической энергии T_1вагонетки и кинетической энергии T_2барабана лебедки:

$$T = T_1 + T_2 = 0{,}5(m\dot{x}^2 + J\dot{\varphi}^2).$$

Находим производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Для определения деформации λ каната при торможении нужно к статическому удлинению λ_{cm}, вызванному действием составляющей $mg\sin\alpha$ силы тяжести тележки, прибавить величину перемещения xтележки с момента начала торможения и отнять длину $R\varphi$ схода каната с барабана за тот же период времени. Усилие натяжения каната

$$F = c\lambda = c(\lambda_{ст} + x - R\varphi) = c\lambda_{ст} + c(x - R\varphi) = mg\sin\alpha + c(x - R\varphi).$$

Вычисляем обобщенную силу $Q\varphi$, сообщая системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta\varphi>0$, $\varphi=const$, $\delta\varphi=0$:

$$Q_x = \sum \delta A_i^{(x)} / \delta x = [mg\,\delta x\cos(90° - \alpha) - F\,\delta x] / \delta x =$$

$$= \{mg\,\delta x\sin\alpha - [mg\sin\alpha + c(x - R\varphi)]\delta x\} / \delta x = -c(x - R\varphi).$$

Вычисляем обобщенную силу Qφ, сообщая системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta\varphi>0$, $x=const$, $\delta x=0$:

$$Q_\varphi = \sum \delta A_i^{(\varphi)} / \delta\varphi = (-M\,\delta\varphi + FR\,\delta\varphi) / \delta\varphi =$$

$$= -M + mgR\sin\alpha + c(x - R\varphi)R.$$

Подставляя значения обобщенных сил и производных в уравнения Лагранжа, получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$m\ddot{x} + c(x - R\varphi) = 0,$$

$$J\ddot{\varphi} + cR(R\varphi - x) = mgR\sin\alpha - M.$$

Ответ: $m\ddot{x} + c(x - R\varphi) = 0;\ J\ddot{\varphi} + cR(R\varphi - x) = mgR\sin\alpha - M.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по теоретической механике па примерах из горной техники и технологии: Учебное пособие / В.С. Перевалов, Г.А. Доброборский, Л.М. Лянсберг и др.; Под общ. ред. В.С. Перевалова. - М.: Издательство МГГУ, 2000. - 217 с.
2. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. - 11-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 1995. - 416 с:
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. I. Статика и кинематика.- 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.- 352 с: ил. Т. И. Динамика.- 6-е изд., перераб. и доп. -М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.-640 с:
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.-М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975.-872 с:
5. Сборник решений задач по теоретической механике на примерах из горной техники и технологии. Часть 1. Статика: Учебное пособие / В.С. Перевалов, В.М. Рачек, Г.А. Доброборский и др.; Под общ. ред. В.С. Перевалова. - М.: Издательство МГГУ, 2001. -263 е.: ил. Часть 2. Кинематика: Учебное пособие / В.С. Перевалов, В. Рачек, Г.А. Доброборский и др.; Под общ. ред. В.С. Перевалова. - М.: Издательство МГГУ, 2002. - 208 с: ил.
6. Сборник задач по теоретической механике на примерах из горной техники и технологии: Учебное пособие / В.С. Перевалов, Г.А. Доброборский, JLM. Лянсберг и др.; Под общ. ред. В.С. Перевалова. -М: Издательство МНУ, 2000.- 217 с, ил.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. T.I. Статика и кинематика.- 8-е изд., перераб. и доп. -М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. -352 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5
Практическая работа №1 Равновесие системы сходящихся сил 6
Практическая работа №2Момент силы 10
Практическая работа №3Равновесие различных систем сил 15
Практическая работа №4Сложение пар сил.Приведение системы сил к простейшему виду 22
Практическая работа №5Центр параллельных сил.Центр тяжести. 29
Практическая работа №6Кинематика точки 36
Практическая работа №7Вращательное движение тела. 45
Практическая работа №8Плоскопараллельное движение тела 50
Практическая работа №9Сложное движение точки 55
Практическая работа №10Первая задача динамики 61
Практическая работа №11Вторая задача динамики 65
Практическая работа №12Количество движения точки 71
Практическая работа №13Теорема об изменении количества движения точки. 75
Практическая работа №14Работа силы 80
Практическая работа №15Кинетическая энергия точки 85
Практическая работа №16Теорема об изменении кинетической энергии точки 93
Практическая работа №17Динамика твердого тела 99
Практическая работа №18Теорема о движении центра масс системы. 105
Практическая работа №19Теорема об изменении количества движения системы. 109
Практическая работа №20Теорема об изменении моментов количества движения системы. 113
Практическая работа №21Теорема об изменении кинетического момента системы. 119
Практическая работа №22Мощность силы 127
Практическая работа №23Кинетическая энергия системы. 131
Практическая работа №24Принцип даламбера для материальной точки.138
Практическая работа №25Принцип даламбера для механической системы. 144
Практическая работа №26Принцип виртуальных перемещений 148
Практическая работа №27Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах 154
Список литературы . 164