МИНИСТЕРСТВО ГОРНО-ДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ГЕОЛОГИИ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХИМИКО-МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИИ

Открытая лекция

доцента А.П. ПИРИМОВА на тему

Скалярное и векторное произведения двух векторов, их свойства и координатная форма. Угол между двумя векторами и условия перпендикулярности и коллениарности. Смещанное произведения трех векторов

Группа: **2– 24 экономика**
Дата: **14. 10.2024**
Время: **с 8^{00} - 9^{20}**
Аудитория: **№ 415**

Скалярное и векторное произведения двух векторов, их свойства и координатная форма. Угол между двумя векторами и условия перпендикулярности и коллениарности. Смещанное произведения трех векторов

Технологическая карта открытого занятия

Этапы, время	Содержание деятельности	
	Преподаватель	студент
1-й этап. Введение (10 мин)	1.1. Определяет тему, цель и метод изложения занятия.	1.1. Слушает и конспект-ирует.
2-й этап Основной (60 мин)	2.1. С целью определения степени готовности студентов проводить блиц вопросы. 1. Как определяется скалярное произведение двух векторов? 2. Как применяется свойства скалярное произведение двух векторов? 3. Какой вид имеет базисные векторы? 2.2. Преподаватель продолжает изложение лекции, используя визуальных материалов. 2.3. Указывает на приложения теории определителей в различных областях науки и техники. 2.4. Используя нижеследующие вопросы, излагает суть данного занятия: а) Какие имеются взаимоотношение между единичными векторами? б) Какими способами можно умножить векторы заданные своими координатами? в). Как умножаются единичные векторы? 2.5. Обращает внимание студентов на основные понятия и их приложения. 2.6. 1. Как определяется векторное произведение двух векторов? 2.6.2. Как применяется свойства векторного произведения двух векторов? 2.6.3. Какие имеются базисные векторы? 2.7. Преподаватель продолжает изложение лекции, используя визуальных материалов. 2.8. Указывает на приложения векторной алгебры в различных областях науки и техники.	1. Отвечая на вопросы, получают подробные представление об изучаемой теме. 2. Конспектирует ответов данных вопросов. 3. Обсуждает разновидность матриц и действия над ними. 4. Отвечая на вопросы, записывает основные места. 5. Записывает каждый вопрос, запоминает определения и приводить примеры для каждого случая.
3-й этап Заключение (10 мин)	Заканчивает лекцию и обращает внимание студентов на основные задачи. Указывает методы их решения и области их применения. Выставить баллы наиболее активным студентам.	Задаёт вопросы по теме. Записывает вопросы домашней работы.

Кроме операций сложения и умножения на число на множестве векторов определены еще несколько операций. Одна из них - скалярное произведение, позволяющее находить длины векторов и углы между векторами по координатам векторов.

Определение *Скалярным произведением* векторов **a** и **b** называется число, равное $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, где φ - угол между векторами **a** и **b** и обозначает **a·b**.

Из определение следует что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, как видно, что скалярное произведение есть скалярная величина.

Замечание. Если один из векторов нулевой, то угол φ не определен. Скалярное произведение в этом случае считается равным нулю. Скалярное произведение обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, или $\mathbf{ab}$, или $(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Определение Скалярное произведение вектора на себя **aa**, обозначается a^2 т.е. скалярное произведение вектора самого себя равно скалярному квадрату вектора т.е. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a^2$.

Теорема 1 *Для любых векторов **a** и **b** выполняется следующие соотношения:*

1) $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ *свойство коммутативности;*
2) $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$, *свойство дистрибутивности;*
3) $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{ab})$;
4) $\mathbf{a}^2>0$ *при* $\mathbf{a}\neq 0$;
5) $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$;
6) *Если* φ *- угол между векторами **a** и **b**, то* $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$;
7) $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|np_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|b|np_b a$, *если* $\mathbf{a}\neq 0$;
8) $\boldsymbol{ab}=0$ *тогда и только тогда, когда векторы **a** и **b** ортогональны.*

Доказательство. Свойства 1,4,5,6 очевидным образом следуют из определения скалярного произведения. Свойство 8 получим, если вспомним, что нулевой вектор считается ортогональным любому вектору. Свойство 7 получим из определения скалярного произведения, в силу которого $\boldsymbol{Пр_a b}=|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$.

Докажем свойство 2. В силу свойства 7, при $\mathbf{a} \neq 0$, имеем $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\Pi p_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. и $\Pi p_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \Pi p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + \Pi p_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$. Поэтому $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|(\Pi p_{\boldsymbol{a}} b + \Pi p_{\boldsymbol{a}} c) = |\boldsymbol{a}|\Pi p_{\boldsymbol{a}} b + |\boldsymbol{a}|\Pi p_{\boldsymbol{a}} c = ab + ac$. Если $\mathbf{a} = 0$, то свойство 2 очевидно.

Докажем свойство 3. При $\mathbf{b} = 0$ свойство очевидно. Пусть $\mathbf{b} \neq 0$. Тогда

$(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\lambda \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}|\Pi p_{\boldsymbol{b}}(\lambda \boldsymbol{a})$.

Так как $\Pi p_{\boldsymbol{b}}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \Pi p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. Поэтому

$(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\lambda \Pi p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \lambda(|\boldsymbol{b}|\Pi p_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$.

Итак, все свойства доказаны.

Ниже приведем формулу для вычисления скалярного произведения по координатам сомножителей в ортонормированном базисе.

Теорема 2. *Если векторы в ортонормированном базисе заданы своими координатами* $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *то*

$$\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \qquad (1)$$

Доказательство. По условию $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$. В силу свойств 1 - 3 скалярного произведения получим

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\alpha_1\cdot\vec{i} + \alpha_2\cdot\vec{j} + \alpha_3\cdot\vec{k})\cdot(\beta_1\cdot\vec{i} + \beta_2\cdot\vec{j} + \beta_3\cdot\vec{k}) = \alpha_1\cdot\vec{i}\,\beta_1\cdot\vec{i} + \alpha_1\cdot\vec{i}\,\beta_2\cdot\vec{j} + \alpha_1\cdot\vec{i}\,\beta_3\cdot\vec{k} +$$

$$\alpha_2\cdot\vec{j}\beta_1\cdot\vec{i} + \alpha_2\vec{j}\cdot\beta_2\cdot\vec{j} + \alpha_2\vec{j}\cdot\beta_3\cdot\vec{k} + \alpha_3\vec{k}\cdot\beta_1\cdot\vec{i} + \alpha_3\vec{k}\cdot\beta_2\cdot\vec{j} + \alpha_3\vec{k}\cdot\beta_3\cdot\vec{k} =$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0 \\ \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \\ \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0 \end{bmatrix} = \alpha_1\cdot\beta_1 + \alpha_2\cdot\beta_2 + \alpha_3\cdot\beta_3 \qquad (2)$$

Подставив полученные результаты в формулу (2), получим требуемую формулу (1). Так как, если $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то $|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ (3)

Пусть в пространстве заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Длина отрезка AB, то есть расстояние между точками А и В, будет равна $|\overrightarrow{AB}|$, и по формуле (3) получим

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4)$$

Читатель без труда перенесет полученные результаты этого раздела на случай двумерного векторного пространства. Формулы (1), (3), (4) останутся справедливыми, только из них нужно исключить третью координату.

Разберем два примера на использование скалярного произведения.

Задача. Даны вершины треугольника: $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$. Найдите длину стороны АВ и угол при вершине А.

Решение. $\overrightarrow{BA}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;-1;4)$, $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$.

$\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot(-1)+(-2)(-1)+2\cdot4=9$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot(-1)+(-2)(-1)+2\cdot4=9$

$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle ABC=45^\circ$. **Ответ:** $AB=3$, $\angle ABC=45^\circ$.

Задача. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах и $\mathbf{b}=\mathbf{m}-2\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 60^o.

Решение. В этой задаче не заданы координаты векторов в ортонормированном базисе $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$. Сделав схематический рисунок (рис. 1),

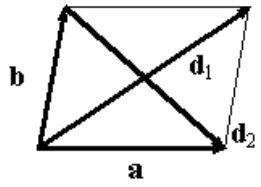


Рис. 1

убеждаемся, что вектор $\mathbf{d}_1$, соответствующий одной диагонали параллелограмма, находится по формуле $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, а другой -- $\mathbf{d}_2=\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Отсюда $\mathbf{d}_1=3\mathbf{m}-\mathbf{n}$ и $\mathbf{d}_2=\mathbf{m}+3\mathbf{n}$. В силу свойства 5 (теорема 10.3) скалярного произведения получим

$|\mathbf{d}_1|^2=\mathbf{d}_1^2=(3\mathbf{m}-\mathbf{n})(3\mathbf{m}-\mathbf{n})=9\mathbf{m}^2-3\mathbf{mn}-3\mathbf{mn}+\mathbf{n}^2=$

$=9|\mathbf{m}|^2-6\mathbf{mn}+|\mathbf{n}|^2=9-6\cdot1\cdot1\cos60^\circ+1=7.$

Аналогично, $\mathbf{d}_2=(\mathbf{m}+3\mathbf{n})(\mathbf{m}+3\mathbf{n})=\mathbf{m}^2+6\mathbf{mn}+9\mathbf{n}^2=1+6\cdot1\cdot1\cos60^\circ+9=13.$

Ответ: 7 и 13.

Векторное произведение

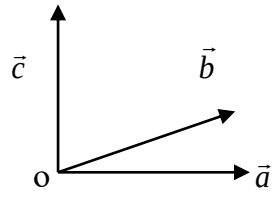
Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

Определение 2 *Векторным произведением* вектора **a** на вектор **b** назовем вектор **c**, удовлетворяющий условию:

1) $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между **a** и **b** и, если $|\mathbf{c}|\neq 0$, то еще двум условиям:

2) вектор **c** ортогонален векторам **a** и **b**;

3) из конца вектора **c** кратчайший поворот от первого вектора **a** к второму вектору **b** виден против часовой стрелки. Начала векторов предполагаются совмещенными.



и обозначается $\vec{c}=\vec{a}x\vec{b}=\left[\vec{a}\vec{b}\right]$

Замечание *Угол между двумя векторами в пространстве всегда удовлетворяет условию* $0\prec\varphi\prec\pi$. *Таким образом,* $\sin\varphi\geq 0$. *Если* $a=0$ *или* $b=0$, *то считается, что векторное произведение равно 0.*

Векторное произведение вектора **a** на вектор **b** обозначается $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ или $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Свойства. Векторное *произведение анти коммутативно, то есть* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. *или если изменить порядок сомножителей, то векторное произведение меняет направление на противоположное.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{d}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Нужно показать, что $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ $\mathbf{c}=-\mathbf{d}$. Из условия 1 следует, что $|\mathbf{c}|=|\mathbf{d}|$. Если $|\mathbf{c}|=0$, то очевидно, что $\mathbf{c}=-\mathbf{d}$. Если $|\mathbf{c}|\neq 0$, то векторы **c** и **d** - коллинеарные, так как оба лежат на прямой, ортогональной плоскости векторов **a** и **b**. Таким образом, остаются только две возможности: $\vec{c}=\vec{d}$ или $\mathbf{c}=-\mathbf{d}$ Пусть вектор $\mathbf{d}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ совпадает с вектором $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Тогда в силу условия 3 из конца одного и того же вектора и поворот от **a** к **b**, и поворот от **b** к **a** по кратчайшему направлению виден против часовой стрелки, что невозможно. Следовательно, $\mathbf{c}=-\mathbf{d}$.

Свойства *Векторное произведение* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *равно нулю тогда и только тогда, когда векторы* ***a*** *и* ***b*** *- коллинеарные.*

Доказательство. Из определения векторного произведения получим, что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=0$, или $\vec{b}=0$, или $\sin\varphi=0$ Из последнего равенства получим, что $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, в этом случае векторы **a** и **b** коллинеарные. Вспомнив, что нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору, получим, что предложение верно и при **a** или **b**, равных нулю.

Свойства. **Для** *любых векторов* ***a*** *и* ***b*** *и любого числа* $\lambda \neq 0$ *выполняется равенство* $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то утверждение очевидно. Если векторы **a** и **b** - коллинеарные, то векторы $\lambda\vec{a}$ и **b** - тоже коллинеарные, и поэтому обе части доказываемого равенства равны нулю.

Пусть $\lambda > 0$, **a**, **b** -- неколлинеарные, $\mathbf{c} = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. Тогда углы, образованные векторами **a** и **b** и векторами λ**a** и **b**, равны. Следовательно,

$$|\mathbf{c}| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi, \quad |\mathbf{d}| = |\lambda||\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi,$$

то есть $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$. Оба вектора **c** и **d** перпендикулярны плоскости векторов **a** и **b** и направлены одинаково, так как равны углы между сомножителями. Следовательно, $\mathbf{c} = \mathbf{d}$. Пусть $\lambda < 0$. Тогда векторы $\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}$ образуют угол $\psi, \psi = \pi - \varphi$, рис. 25.

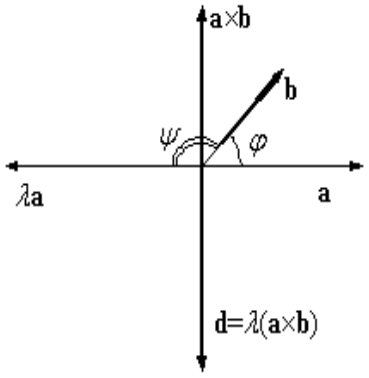


Рис. 25

Вычисляем модули: $|\mathbf{c}| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\pi - \varphi) = |\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, $|\mathbf{d}| = |\lambda||\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, то есть $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$. Векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}$ и **d** перпендикулярны плоскости векторов **a** и **b**. Векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и **c** имеют противоположные направления, так как поворот от **a** и от $\lambda\vec{a}$ к вектору **b** происходят в противоположных направлениях. Но вектор **d** имеет направление, противоположное вектору $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (рис. 25) и, следовательно, одинаковое с вектором **c**. Получили, что $\mathbf{c} = \mathbf{d}$.

Свойства *Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, то есть* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

Доказательство это свойства будет проведено позже.

С помощью векторного произведения можно найти площади параллелограмма и треугольника.

Теорема *Площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы* ***a*** *и* ***b****, равна модулю их векторного произведения,* $S_{\text{ïàð}} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

Площадь треугольника со сторонами ***a, b*** *равно* $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

Доказательство естественным образом вытекает из условия 1 в определении векторного произведения.

Отметим еще одну особенность векторного произведения, отличающую его от операции умножения чисел.

Свойства *Векторное произведение не является ассоциативным, то есть существуют такие векторы* ***a, b, c,*** *что* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Доказательство. Пусть **a** и **b** - любые неколлинеарные векторы, $\vec{c}=\vec{d}$. Тогда вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq 0$, кроме того, этот вектор ортогонален плоскости векторов **a** и **b**. Таким образом, векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и **c** - неколлинеарные, поэтому $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq 0$. С другой стороны, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$. Поэтому $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$. Получили, что $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Выражение векторного произведения через координаты преумножаемых векторов

Пусть в пространстве выбран ортонормированный базис ***i, j, k***. Наложим на этот базис еще одно дополнительное условие, а именно: из конца вектора ***k*** поворот от ***i*** к ***j*** по кратчайшему направлению должен быть виден против часовой стрелки.

Определение Упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ будем называть *правой тройкой векторов*, если из конца третьего вектора $\mathbf{a}_3$ поворот от первого вектора $\mathbf{a}_1$ ко второму вектору $\mathbf{a}_2$ по кратчайшему направлению виден против часовой стрелки. Если поворот виден по часовой стрелке, то тройку называют *левой тройкой векторов*.

Оказывается, если векторы правой тройки изменять непрерывно, но так, чтобы в любой момент времени они были не компланарны, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет правой тройкой. Аналогичным свойством обладает и левая тройка векторов.

Отметим также, что определение векторного произведения и правой (левой) тройки векторов связаны с наличием в пространстве "физических" объектов: часов, человека и т. п. В абстрактном векторном пространстве, где такие объекты отсутствуют, определить, какая тройка- правая, а какая - левая, невозможно.

Итак, пусть в трехмерном пространстве задан ортонормированный базис **i, j, k**, векторы которого образуют правую тройку векторов. Такой базис будем называть *правым*.

Используя определение векторного произведения, легко проверить следующую таблицу умножения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

a \ b	**i**	**j**	**k**
i	0	**k**	**- j**
j	**- k**	0	**i**
k	**j**	**- i**	0

Свойства. Пусть $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Тогда

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Доказательство. По условию $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}$ тогда получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3 k)\times\mathbf{b}=\alpha_1(i\times\mathbf{b})+\alpha_2(\mathbf{j}\times\mathbf{b})+\alpha_3(\mathbf{k}\times\mathbf{b}) \qquad (1)$$

По тем же правилам

$$\mathbf{i}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\times(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k})=\beta_1(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+\beta_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+\beta_3(\mathbf{i}\times\mathbf{k}).$$

По таблице умножения $\mathbf{i}\times\mathbf{b}=\beta_2\mathbf{k}-\beta_3\mathbf{j}$. Аналогично находим $\mathbf{j}\times\mathbf{b}=-\beta_1\mathbf{k}+\beta_3\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{j}-\beta_2\mathbf{i}$. Подставив полученные результаты в формулу (1), получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\alpha_1(\beta_2\mathbf{k}-\beta_3\mathbf{j})+\alpha_2(-\beta_1\mathbf{k}+\beta_3\mathbf{i})+\alpha_3(\beta_1\mathbf{j}-\beta_2\mathbf{i})=$$

$$=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{k}.$$

Запомнить полученную формулу довольно тяжело. Чтобы облегчить этот процесс, введем еще два дополнительных объекта -- матрицу и определитель.

Матрицей второго порядка будем называть таблицу из четырех чисел, которая обозначается $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$, *матрицей третьего порядка* называется таблица из 9 чисел – $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$

Определителем матрицы второго порядка будем называть число $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$.

Определитель второго порядка обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

Определителем матрицы третьего порядка будем называть число

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Сформулируем словами правило вычисления определителя третьего порядка.

Берем первый элемент первой строки. Мысленно вычеркиваем строку и столбец с этим элементом. Умножаем этот элемент на определитель, оставшийся после вычеркивания. Затем пишем знак "-" и берем второй элемент первой строки. Мысленно вычеркиваем строку и столбец с этим элементом и пишем оставшийся определитель. Затем пишем знак "+" и третий элемент первой строки. Снова вычеркиваем строку и столбец с этим элементом и пишем оставшийся определитель.

В дальнейшем мы увидим, что столь сложно введенное понятие определителя оказывается очень полезным при решении систем линейных уравнений, определении линейной зависимости векторов и во многих других задачах.

Пример 1 Вычисление определителей:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 1\cdot(-1) = 13.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \big((-1)\cdot 4 - 0\cdot 1\big) - 2\cdot(1\cdot 4 - 0\cdot 2) - 3\big(1\cdot 1 - (-1)\cdot 2\big) = -21$

Формула для определителя третьего порядка позволяет кратко записать формулу для вычисления векторного произведения.

Свойства *Если в правом ортонормированном базисе* **i**,**j**,**k** *заданы координаты векторов* $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *то*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Доказательство. Достаточно лишь написать формулу вычисления приведенного в теореме определителя и сравнить ее с формулой предложения 24.

Пример 2 Пусть $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-3\mathbf{k}$. Тогда

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\big((-2)\cdot(-3)-1\cdot 0\big)-\mathbf{j}\big(1\cdot(-3)-1\cdot 2\big)+\mathbf{k}\big(1\cdot 0-(-2)\cdot 2\big)=6\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$$

Задача. Пусть вершины треугольника расположены в точках $A(1;-1;2)$, $B(2;2;1)$, $C(0;4;-1)$. Найдите площадь треугольника.

Решение. По формуле $S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. Находим $\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;5;-3)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 5 & -3\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(-9+5)-\mathbf{j}(-3-1)+\mathbf{k}(5+3)=-4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+8\mathbf{k},$$

то есть $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4;4;8)$. Тогда

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\sqrt{16+16+64}=\frac{1}{2}\sqrt{96}=2\sqrt{6}.$$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

Задача. Найдите такой единичный вектор **e**, ортогональный векторам $\mathbf{a}=(3;2;2)$, $\mathbf{b}=(1;-1;4)$, что тройка векторов **a**,**b**,**e** -- левая.

Решение. Найдем вектор $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}).$$

Вектор **c** ортогонален векторам **a** и **b**. Найдем его длину: $|\mathbf{c}|=5\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=15$. Тогда $\mathbf{d}=\frac{1}{15}\mathbf{c}$ -- единичный вектор, ортогональный векторам **a**,**b**. Векторы **a**,**b**,**c**, а следовательно, и векторы **a**,**b**, $\mathbf{d}=\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. образуют правую тройку векторов. Поэтому $\mathbf{e}=-\mathbf{d}$. **Ответ:** $\mathbf{e}=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Литература

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015, 275 bet.
2. J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing, 2012.
3. Рябушко А.П., Жур Т.А. Высшая математика: теория и задачи: учеб. пособие. В 5 ч: 1ч., 2ч., 3ч. Минск «Высшая школа» – 2016, 2018.
4. Заитов А.А. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебное пособие. – Т.: «Тафаккур», 2020.
5. www. ziyonet.uz;
6. www.bilim.uz;